INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»,

dedicated to

IVAN G. PETROVSKII

(1901-1973)

XXIV Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society

BOOK of ABSTRACTS

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Moscow, December 26-30

2021

http://158.250.33.149:8080/petr/home_rus.php

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвященная выдающемуся математику

И. Г. ПЕТРОВСКОМУ

(1901 — 1973)

24-е совместное заседание Московского математического общества
и Семинара имени И.Г.Петровского

Москва, 26 – 30 декабря 2021

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2022

Международная конференция, посвященная выдающемуся математику И. Г. Петровскому (24-е совместное заседание ММО и Семинара имени И.Г.Петровского, 26–30 декабря 2021, МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2022. — 352 с.

Программный комитет

В. А. Садовничий (сопредседатель), В. В. Козлов (сопредседатель), И. В. Асташова (заместитель председателя), А. А. Шкаликов (заместитель председателя), А. В. Боровских, А. А. Давыдов, В. Егер, Ю. С. Ильяшенко, И. Т. Кигурадзе, А. А. Коньков, Н. С. Надирашвили, С. П. Новиков, А. Л. Пятницкий, Е. В. Радкевич, О. С. Розанова, И. Н. Сергеев, Я. Г. Синай, Д. В. Трещев, А. В. Филиновский, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, Т. А. Шапошникова

Организационный комитет

А. И. Шафаревич (сопредседатель), В. Н. Чубариков (сопредседатель), А. А. Шкаликов (сопредседатель), И. В. Асташова (заместитель председателя), Г. А. Чечкин (заместитель председателя), А. В. Боровских, В. В. Быков, А. Ю. Ветохин, А. А. Владимиров, А. Ю. Горицкий, Н. В. Денисова, Т. О. Капустина, Е. С. Карулина, А. А. Коньков, Е. В. Коробко, Д. В. Миллионщиков, В. В. Палин, О. С. Розанова, В. В. Рогачев, М. С. Романов, А. М. Савчук, И. В. Филимонова, А. В. Филиновский, И. А. Шейпак

Конференция поддержана
Российским Научным Фондом, проект № 20-11-20272,
Московским государственным университетом им. М.В.Ломоносова,
Механико-математическим факультетом МГУ им. М.В.Ломоносова.

ISBN

INTERNATIONAL CONFERENCE

«Differential Equations and Related Topics»

dedicated to outstanding mathematician

I. G. PETROVSKII

(1901 — 1973)

24th joint session of Moscow Mathematical Society
and I.G.Petrovskii Seminar

Moscow, December 26 – 30, 2021

BOOK of ABSTRACTS

Moscow, 2022

International Conference dedicated to outstanding mathematician I. G. Petrovskii (24th joint session of Moscow Mathematical Society and I.G.Petrovskii Seminar, December 26–30, 2021, Lomonosov MSU, Moscow): Book of Abstracts. — Moscow: Moscow University Press, 2022. — 352 P.

Program Committee

V. A. Sadovnichii (Co-Chairman), V. V. Kozlov (Co-Chairman), I. V. Astashova (Vice-Chairman), A. A. Shkalikov (Vice-Chairman), A. V. Borovskikh, G. A. Chechkin, A. A. Davydov, A. V. Filinovsky, Yu. S. Ilyashenko, W. Jäger, I. T. Kiguradze, A. A. Kon'kov, N. S. Nadirashvili, S. P. Novikov, A. L. Piatnitski, E. V. Radkevich, O. S. Rozanova, I. N. Sergeev, A. S. Shamaev, T. A. Shaposhnikova, Ya. G. Sinai, D. V. Treschev

Organizing Committee

A. I. Shafarevich (Co-Chairman), V. N. Chubarikov (Co-Chairman), A. A. Shkalikov (Co-Chairman), I. V. Astashova (Vice-Chairman), G. A. Chechkin (Vice-Chairman), A. V. Borovskikh, V. V. Bykov, N. V. Denisova, I. V. Filimonova, A. V. Filinovsky, A. Yu. Goritskii, T. O. Kapustina, E. S. Karulina, A. A. Kon'kov, E. V. Korobko, D. V. Millionshchikov, V. V. Palin, O. S. Rozanova, V. V. Rogachev, M. S. Romanov, A. M. Savchuk, I. A. Sheipak, A. Yu. Vetokhin, A. A. Vladimirov

Conference is supported by
Russian Science Foundation, project №20-11-20272,
Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics of Lomonosov MSU.

ISBN

ON SIMPLE SINGULARITIES OF SKEW-SYMMETRIC MATRIX FAMILIES

ABDRAKHMANOVA N.T.[1], ASTASHOV E.A.[2]

There exists a number of papers devoted to the classification of smooth or analytic matrix families. Such families naturally appear in the study of binary differential equations, dependency sets of vector fields on manifolds, as well as in connection with other problems in differential geometry. It is natural to consider such families up to $\mathcal{G}$-equivalence, i. e., up to parameter-dependent linear base changes and parameter changes.

In [1] analytic families of square matrices, which can be viewed as linear maps between equidimensional spaces, are considered. In particular, normal forms of $\mathcal{G}$-simple mappings (i. e., those having a finite number of adjacent $\mathcal{G}$-orbits) are obtained. An ideologically similar paper [2] is devoted to the study of analytic families of symmetric matrices.

In [3] analytic families of skew-symmetric matrices are considered. In particular, a complete classification of two-parameter 4×4 $\mathcal{G}$-simple skew-symmetric matrix families and a partial classification of three-parametric 4×4 $\mathcal{G}$-simple skew-symmetric matrix families are obtained.

In our work we obtain a necessary condition for a skew-symmetric matrix family to be $\mathcal{G}$-simple in terms of number of parameters, matrix size, and 1-jet rank. We also classify skew-symmetric matrix families with 1-jet of corank zero. Our work is generally inspired by aforementioned papers [1] and [2], while our results are new compared to those obtained in [3].

The main results of our work are given in Theorems 1, 2, and 3 below. We consider the set $\mathbf{Sk}_n^r$ of germs at zero of $n\times n$ skew-symmetric matrix families analytically depending on r parameters and denote $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

Theorem 1. *If either of the following conditions holds, then there exist no $\mathcal{G}$-simple germs in $\mathbf{Sk}_n^r$:*

a) $n = r = 5$;

b) $n \geq 6$ and $3 \leq r \leq N - 3$.

Theorem 2. *Assume that a germ $A \in \mathbf{Sk}_n^r$ has 1-jet of corank zero. Then the germ A is $\mathcal{G}$-simple and $\mathcal{G}$-equivalent to the germ*

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & \dots & \dots & x_{1,n} \\ -x_{1,2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & x_{n-1,n} \\ -x_{1,n} & \dots & \dots & -x_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix},$$

where each entry above the main diagonal is a different parameter $x_{i,j}\,(1 \leq i < j \leq n)$.

Theorem 3. *Assume that a germ $A \in \mathbf{Sk}_n^r$ has 1-jet of rank s. If any of the following conditions is satisfied, then the germ A is not $\mathcal{G}$-simple:*

a) $n = s = 5$;

b) $n \geq 6$ *and* $3 \leq s \leq N - 3$;

c) $n \geq 3, r \geq 3,$ *and* $s = 0$;

d) $n \geq 5, r = 2,$ *and* $s = 0$.

The research was supported by the Russian Science Foundation grant 21-11-00080.

References

[1] Bruce J. W., Tari F., *On Families of Square Matrices*, Cadernos de Mathematica Vol. **03**, 217–242 (2002).

[2] Bruce J. W., *On Families of Symmetric Matrices*, Moscow mathematical journal Vol. **3**, 335–360 (2003).

[3] Haslinger G. J., *Families of Skew-symmetric Matrices*, Ph. D. thesis, University of Liverpool (2001).

[1]Lomonosov Moscow State University, Russia. Email: abd.nelly@yandex.ru

[2]Lomonosov Moscow State University, Russia. Email: ast-ea@yandex.ru

ASYMPTOTIC HOMOLOGY OF PATHS SPACES: TWO CASES STUDY

AGRACHEV A.A.

Given a nonholonomic vector distribution on a smooth manifold M, it is well-known that embedding of the horizontal loop space into the whole loop space is a homotopy equivalence.

We know however that horizontal loop spaces have deep singularities and extremely rich local and global structure even if M is contractible.

In principle, one can recover hidden structural complexity of the horizontal loop spaces calculating homology of some natural filtrations of the space. I am going to show two examples of such calculations.

SISSA, Trieste and MIAN, Moscow. Email: agrachevaa@gmail.com

ON A CYCLE IN ONE MODEL OF CIRCADIAN OSCILLATOR

AKINSHIN A.A.[1], GOLUBYATNIKOV V.P.[2], KIRILLOVA N.E.[3]

We consider 6D nonlinear kinetic system of differential equations

$$\dot{x}_1 = k_1(\Gamma_1(x_2)\cdot\gamma_1(x_3) - x_1);\;\; \dot{x}_j = k_j(\Gamma_j(x_5)\cdot L_j(x_1) - x_j);\; j = 2,3,4;$$

$$\dot{x}_5 = k_5(\Gamma_5(x_6) - x_5);\;\; \dot{x}_6 = k_6(L_6(x_4) - x_6); \qquad (1)$$

as a model of circadian oscillator functioning proposed in [1]. All the variables denote concentrations of its components, the rates of their natural degradation are characterized by positive coefficients k_*.

Smooth positive functions Γ_*, and γ_1 increase monotonically, they describe positive feedbacks. The shapes of their graphs was described in [2], see the Figure 1 there. Smooth positive functions L_* are monotonically decreasing, they describe negative feedbacks in the oscillator. In contrast with [1, 3], we do not specify here analytic forms of all these functions. As in algebraic topology, subscript $_*$ denotes all possible values of corresponding indices.

Lemma 1. *If the functions* $\Gamma_2(x_5)$, $\Gamma_3(x_5)$, *are proportional to* $\Gamma_4(x_5)$, *and the functions* $L_2(x_1)$, $L_3(x_1)$ *are proportional to* $L_4(x_1)$, *then the system* (1) *has a unique equilibrium point* S_0.

Actually, proportionality conditions of this Lemma have a biological background, they are just sufficient, and can be relaxed considerably.

Theorem 1. *If the conditions of the Lemma* 1 *are satisfied, all coefficients* k_* *are equal, and*

$$-L_6'\Gamma_5 L_4 \Gamma_4' > 8 - 2(\Gamma_1\gamma_1' L_3' \Gamma_3 + \Gamma_1' \gamma_1 L_2' \Gamma_2), \tag{2}$$

then the point S_0 *is unstable, and the system* (1) *has a cycle.*

Here all the derivatives L_*', Γ_*', γ_1' are calculated at the equilibrium point S_0; note that $L_*' < 0$, see [4].

In order to carry out numerical experiments with trajectories of the system (1), its limit cycle, and visualization of these results, a special cloud application based on the "client-server" approach similar to [3] is elaborated: https://andreyakinshin.shinyapps.io/clock-bmal1/

The numerical simulations are performed using the 'lsoda' solver from the Livermore family, which automatically switches between stiff and non-stiff methods. Here, we have observed bifurcation cycles as well.

In the cases when the condition (2) is not satisfied, we have seen in these experiments that trajectories of the system (1) tend to the stable equilibrium point S_0.

The research was supported by RFBR grant 20-31-90011.

References

[1] Almeida S., Chaves M., Delaunay F. *Transcription-based circadian mechanism controls the duration of molecular clock states in response to signaling inputs.* Journal of Theoretical Biology. 2020. V. 484. P. 110015.

[2] Kolmogorov A. N., Petrovskii I. G., Piskunov N. S. *Investigation of the diffusion equation related to increasing of amount of a substance, and its application to one biological problem.* (Russ) Bull. MSU. Math. and Mech. 1937, V. 1. N 6. P. 1–16.

[3] Bukharina T. A., Akinshin A. A., Golubyatnikov V. P., Furman D. P. *Mathematical and numerical models of the central regulatory circuit of the morphogenesis sytem of Drosophila.* J. Applied and Industrial Math. 2020. V. 14. N 2. P. 249–255.

[4] Golubyatnikov V.P., Podkolodnaya O.A., Podkolodnyy N.L., Ayupova N.B., Kirillova N.E., Yunosheva E.V. Conditions of existence of cycles in two basic models of circadian oscillators of mammalians. Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2021. V. 24. N 4. P. 39–53.

[1]JetBrains, Russia. Email: andrey.akinshin@gmail.com
[2]Sobolev Institute of Mathematics, Russia.
Email: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org
[3]Sobolev Institute of Mathematics, Russia. Email: n.kirillova@g.nsu.ru

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR A LINEAR SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH A PARTIAL MUCKENHOUPT WEIGHT

ALKHUTOV YU.A.[1], SURNACHEV M.D.[2]

In a bounded domain $D \subset \mathbb{R}^n$, where $n \geq 2$, we consider the equation

$$Lu = \operatorname{div}(\omega(x)\nabla u) = 0 \tag{1}$$

with a nonnegative weight $\omega \in L^1(D)$ such that $\omega^{-1} \in L^1(D)$. To define a solution we introduce the class of functions

$$W = W(D,\omega) = \{u \in W^{1,1}(D) \ : \ (u^2 + |\nabla u|^2)\omega \in L^1(D)\},$$

equipped with the norm

$$\|u\|_W = \Big(\int\limits_D (u^2 + |\nabla u|^2)\,\omega\,dx\Big)^{1/2}.$$

By $W_0(D,\omega)$ we denote the closure in $W(D,\omega)$ of the set of functions from $W(D,\omega)$ with compact support in D.

A function $u \in W(D,\omega)$ is a solution of (1) in D if

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla\psi\,\omega\,dx = 0 \quad \forall\psi \in W_0(D,\omega).$$

We consider partial Muckenhouipt weigts introduced in [1] and [2]. The domain D is split by the hyperplane $\Sigma = \{x_n = 0\}$ into two parts $D^{(1)} = D \cap \{x_n > 0\}$ and $D^{(2)} = D \cap \{x_n < 0\}$, and the weight

$$\omega = \omega_i \quad \text{in} \quad D^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

where the weights ω_1, ω_2 are even with respect to Σ and belong to the Muckenhoupt class A_2. We assume that for balls B_r of radius with centers on Σ for almost all $x \in B_r$ for $r \leq r_0$ there holds

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(B_r)} \leq C\frac{\omega_2(x)}{\omega_2(B_r)} \tag{2}$$

with a constant C independent of r and x. Our conditions imply

$$\int\limits_D |u|^2\omega\,dx \leq C(n,\omega)\int\limits_D |\nabla u|^2\omega\,dx \quad \forall u \in W_0(D,\omega),$$

so the space $W_0(D,\omega)$ can be equipped with the scalar product

$$(u,v) = \int\limits_D \nabla u \cdot \nabla v \, \omega \, dx.$$

Let us define a (generalized) solution to the Dirichlet problem

$$Lu_f = 0 \quad \text{in} \quad D, \quad u_f\big|_{\partial D} = f \in C(\partial D) \tag{3}$$

Extend f by continuity to the whole space without increasing the maximum of its modulus. Let $f_k \in C^\infty(\overline{D})$ uniformly converge to f in $\overline{D}$. Let u_k be solutions to the Dirichlet problems

$$Lu_k = 0 \quad \text{in} \quad D, \quad u_k - f_k \in W_0(D,\omega).$$

Then u_k uniformly converge to a function u in D and $u_k \to u$ in $W(D',\omega)$ for any $D' \Subset D$. The limit function u is a solution to (1) in any $D' \Subset D$, is independent of the extension and approximation of f, and u is called the (generalized) solution of the Dirichlet problem (3).

Theorem 1 ([3]). *Let the intersection of complement of D with $\{x_n < 0\}$ contains an open cone in a neighbourhood of the boundary point x_0. Then for any $f \in C(\partial D)$ solutions of the Dirichlet problem* (3) *are continuous at x_0 and*

$$\operatorname*{osc}_{B_r^{x_0} \cap D} u_f \le C(r/\rho)^\alpha \operatorname*{osc}_{\partial D} f + \operatorname*{osc}_{B_\rho^{x_0} \cap \partial D} f,$$

for sufficiently small $0 < r < \rho$. The positive constants C and α depend only on the dimension of the space, the angular opening of the cone, the Muckenhoupt constants of the weights ω_1, ω_2, and the constant in (2).

The proof relies on a special form of the Harnack inequality established in [4]. The research was supported by RFBR grant 19-01-00184.

References

[1] Alkhutov Yu. A., Zhikov V. V., On the Hölder property of solutions of degenerate elliptic equations, Dokl. Math. 63, No. 3, 368–373 (2001).

[2] Alkhutov Yu. A., Zhikov V. V., A class of degenerate elliptic equations, J. Math. Sci. 120, No. 3, 1247–1254 (2004).

[3] Alkhutov Yu. A., Surnachev M. D. The boundary behavior of a solution to the Dirichlet problem for a linear degenerate second order elliptic equation. J. Math. Sci. 259, 109–127 (2021).

[4] Alkhutov Yu. A., Khrenova E. A., Harnack inequality for a class of second-order degenerate elliptic equations, Proc. Steklov Inst. Math. 278, 1–9 (2012).

[1]Vladimir State University, Russia. Email: yurij-alkhutov@yandex.ru

[2]Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Russia.
Email: peitsche@yandex.ru

REGULARITY PROBLEM TO A CLASS OF STRONGLY NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS

ARKHIPOVA A.A.

We consider elliptic and parabolic quasilinear systems of equations with nondiagonal principal matrices and strongly nonlinear (quadratic) in the gradient additional terms.

Partial regularity of weak solutions to the strongly nonlinear systems is always studied under the assumption that the solution is bounded and its L^∞- norm is small enough.

We relax this assumption and study weak *unbounded* solutions. Under a one-side restriction on the strongly nonlinear terms, we describe conditions of the local smoothness of weak solutions.

As is known, the one-side condition for the strongly nonlinear term provides boundedness and further regularity of solutions to the *scalar* elliptic and parabolic equations. At the same time, this condition does not guarantee smoothness of weak solutions even for the diagonal systems. The singularities can appear in the case of such systems.

The research was supported by RFBR, grant 20-01-00630a.

References

[1] A. Arkhipova, *Local regularity of weak solutions to quasilinear elliptic systems with one-side condition on quadratic nonlinearity in the gradient.* Probl. Mat. Anal. **108** (2021), 35-52; English transl. J. Math. Sci. (New York), **255** (2021), no. 4, 388-408.

[2] A. Arkhipova, *Regularity conditions for nonlinear elliptic systems with quadratic nonlinearities in the gradient.* Probl. Mat. Anal. **112** (2021), 19-34; English transl. J. Math. Sci. (New York), **259**, (2021), no. 2, 128-147.

St-Petersburg State University, Russia. Email: arinaark@gmail.com

ANTISYMMETRIZED GELFAND-KAPRANOV-ZELEVINSKY SYSTEM, ITS SOLUTIONS AND THEIR APPLICATION

ARTAMONOV D.V.

In the 80-th I.M. Gelfand, M.I. Graev, V. S. Retakh, A. V. Zelevinskii, M. M. Kapranov created the theory of A-hypergeometric functions. These are multivariate functions that can be viewed as generalizations of hypergeometric functions of one variable. There many such generalizations, but from one hand the class of A-hypergeometric functions includes most of certain examples of multivariate hypergeometric functions and from the other hand it posesses a lot of good properties. In particular these function satisfy a promiment system of PDE called the Gelfand-Kapranov-Zelevinsky (GKZ for short) system.

Such functions appear in many areas of mathematics: PDE, geometry, algebra, representation theory. They naturally appear in the following situation. Consider the group $GL_n(\mathbb{C})$ and function on this group. The group acts on these functions by left shifts and thus the space of functions is a representation of $GL_n(\mathbb{C})$. Every finite dimensional representation of $GL_n(\mathbb{C})$ can be realized as a subrepresentation in this space. The question is what are the functions that form a base in such a realization of a finite dimensional representation?

To answer this question we come naturally to the following construction.

Cosnider the complex space whose coordinates z_X are indexed by proper subsets $X \subset \{1, ..., n\}$. For all possible indices $i < j < y$, and subsets $Y \subset \{1, ..., n\}$ we consider the following system of PDE:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_{1,...,i-i,i,Y} \partial z_{1,...,i-i,j,y,Y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial z_{1,...,i-i,j,Y} \partial z_{1,...,i-i,i,y,Y}} = 0$$

This is a particular example of a GKZ system, it's solution space is well investigated. But we associate with it the antisymmetrized GKZ system (A-GKZ for short)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_{1,\dots,i-i,i,Y}\partial z_{1,\dots,i-i,j,y,Y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial z_{1,\dots,i-i,j,Y}\partial z_{1,\dots,i-i,i,y,Y}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial z_{1,\dots,i-i,,Y}\partial z_{1,\dots,i-i,i,,Y}} = 0$$

In the talk a description of the solution space for this system will be given. It turns out that solution of the GKZ system are in some sence the intial conditions for the solutions of the A-GKZ system.

The obtained description of the solution space for the A-GKZ system allows to answer the question in the representation theory posed above.

References

[1] Artamonov D. V., *Antisimetrization of the Gelfand-Kapranov-Zelevinskij systems*, J. Math. Sc., 255, N 5, 535–542

Lomonosov Moscow State University, Russia.
Email: artamonov.dmitri@gmail.com

ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A DISCONTINUOUS INTEGRAND

ASEEV S.M.

We consider the following problem (P):

$$J(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + \int_0^T \lambda(x(t))\delta_M(x(t))\, dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),$$

$$x(0) \in M_0, \qquad x(T) \in M_1.$$

Here $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $F(\cdot)$ is a locally Lipschitz continuous multivalued mapping with nonempty convex compact values, $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ is a locally Lipschitz continuous function, $\lambda(\cdot)$ is a $C^1(\mathbb{R}^n)$ positive function, M_0 and M_1 are nonempty closed sets in $\mathbb{R}^n$, M is an open set in $\mathbb{R}^n$, and

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

We assume that both the set M and its complement $G = R^n \setminus M$ are nonempty, and for any $x \in G$ the Clarke tangent cone $T_G(x)$ has nonempty interior. The terminal time $T > 0$ is free.

Theorem 1. *Let $x_*(\cdot)$ be an optimal trajectory in (P), and $T_* > 0$ be the corresponding optimal terminal time. Then there are a $\psi^0 \geq 0$, an absolutely continuous function $\psi\colon [0, T_*] \to \mathbb{R}^n$, and a bounded regular Borel vector measure η on $[0, T_*]$ such that the following conditions hold:*

1). *We have $supp\,\eta \subset \mathfrak{M} = \{t \in [0, T_*]\colon x_*(t) \in \partial G\}$. Moreover, for any continuous function $y\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^n$ with values $y(t) \in T_G(x_*(t))$, $t \in \mathfrak{M}$, the following inequality takes place:*

$$\int_{\mathfrak{M}} y(t)\, d\eta \leq 0.$$

2). *For a.e. $t \in [0, T_*]$ the refined Euler-Lagrange inclusion holds:*

$$\dot{\psi}(t) \in conv\Big\{u\colon \Big(u, \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s))d\eta$$

$$+\psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds\Big) \in \widehat{N}_{graph F(\cdot)}(x_*(t), \dot{x}_*(t))\Big\}.$$

3). *For $t = T_*$ and for any $t \in [0, T_*)$ which is a point of the right approximate continuity of the function $\delta_M(x_*(\cdot))$ we have*

$$H\left(F(x_*(t)), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s))d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds\right)$$

$$-\psi^0 \lambda(x_*(t)) \delta_M(x_*(t)) = H\left(F(x_*(0)), \psi(0)\right) - \psi^0 \lambda(x_*(0)) \delta_M(x_*(0))\,.$$

4). *The transversality condition takes place:*

$$\Big(H(F(x_*(T_*)), \psi(T_*) + \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s))d\eta + \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds),$$

$$\psi(0), -\psi(T_*) - \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s))d\eta - \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds\Big)$$

$$\in \psi^0 \hat{\partial} \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \{0\} \times \widehat{N}_{\widetilde{M}_0}(x_*(0)) \times \widehat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_*(T_*)).$$

5). *The nontriviality condition holds:*

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0.$$

Here $\widehat{N}_A(a)$ is the cone of generalized normals to a closed set A at $a \in A$, $\hat{\partial}\varphi(T, x_1, x_2)$ is a generalized gradient of a function $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ and

$$\widetilde{M_0} = \begin{cases} M_0 & \text{if} \quad x_*(0) \in M, \\ M_0 \bigcap G & \text{if} \quad x_*(0) \in G, \end{cases} \quad \widetilde{M_1} = \begin{cases} M_1 & \text{if} \quad x_*(T_*) \in M, \\ M_1 \bigcap G & \text{if} \quad x_*(T_*) \in G. \end{cases}$$

The proof of Theorem 1, discussions and an example see in [1].

The research was supported by the Russian Science Foundation under grant 19-11-00223.

References

[1] Aseev S. M., *Refined Euler-Lagrange inclusion for an optimal control problem with discontinuous integrand*, Trudy Mat. Inst. Steklova, 315, 2021, 34–63.

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia. Email: aseev@mi-ras.ru

OPTIMAL DESIGN PROBLEM FOR THREE DISKS ON TORUS

ASHIMOV YE.K.

One of the topical problems both in geometry and physics is an optimal design problem. Majority of valuable works were devoted to the problem for elliptic functions, for example, the square lattice, the hexagonal lattice, problems with the fundamental translation vectors. Note, that the vectors are periods for the square lattice, and there are two fundamental translation vectors for the hexagonal lattice. Moreover all these combinations are linear. It is considered, that the periods can be continued and shifted.

Consider the torus, the hexagonal lattice, with the fundamental translation vectors. Also we consider Weierstrass functions and their invariants. It is well-known, that the problem became sophisticated under consideration of the complex variable functions.

In general case, the series associated to periodic analytical functions, Eisenstein's series, are considered. The series are used under consideration of the Weierstrass invariants. A supplementary Weierstrass' function is introduced. The function is used for simulation of the disks. Then the disks are summarized. The disks are embedded to the square with probability and this radius on Ox axis. The same on the axis Oy. Therefore, it is verified an imposition of the disks. In the case of the disks imposition are thrown out.

The process is repeated for all disks. We are going to use the Eisenstein structural sums for multivariable functions. It should be noted, that they are applied to compete a property of the composite fibre materials. The random process is called isotropy. It is possible, that there are a lot of disks.

Regarding this we have to simulate and assume that the second disk is known a3=0. Then we calculate e2. It is calculated with one unknown point. By minimizing of the function we can find the optimal packing of the disks. In the paper we describe the problem deeply.

The research was financially supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08856381).

Al-Farabi Kazakh National University, Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Kazakhstan. Email: yeskendyr@gmail.com

A SOLVABILITY TO NONLOCAL PROBLEM FOR SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH PIECEWISE-CONSTANT ARGUMENT OF GENERALIZED TYPE

ASSANOVA A.T.

On the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider the nonlocal problem for system of hyperbolic equations with piecewise-constant argument of generalized type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + f(t,x) + \\ + A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x), \tag{1}$$

$$P(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + S(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $C_0(t,x)$ and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω; $\gamma(t) = \zeta_j$ if $t \in [\theta_j, \theta_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$; $\theta_j \le \zeta_j \le \theta_{j+1}$ for all $j = \overline{0, N-1}$;

$0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{N-1} < \theta_N = T$; the $n \times n$ matrices $P(x)$, $S(x)$ and the n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0, \omega]$, the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0, T]$.

Let $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ be the space of continuous on Ω vector functions $u(t, x)$ with the norm $||u||_0 = \max_{(t,x)\in\Omega} ||u(t, x)||$.

A vector function $u(t, x) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ is a solution to problem (1)–(3) if:
(i) $u(t, x)$ has partial derivatives $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$;
(ii) the mixed partial derivative $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}$ exists at each point $(t, x) \in \Omega$ with the possible exception of the points (θ_j, x), $j = \overline{0, N-1}$, for all $x \in [0, \omega]$, where the one-sided mixed partial derivatives exist;
(iii) system of hyperbolic equations (1) is satisfied for $u(t, x)$ on each subdomain $(\theta_j, \theta_{j+1}) \times [0, \omega]$, $j = \overline{0, N-1}$, and it holds for the right mixed partial derivative of $u(t, x)$ at the points (θ_j, x), $j = \overline{0, N-1}$, $x \in [0, \omega]$;
(iv) boundary conditions (2), (3) are satisfied for $u(t, x)$ at the lines $t = 0$, $t = T$, $x = 0$, respectively.

Differential equations with discontinuities comprise an important tool for understanding real-world problems since they mathematically express real phenomena. A particular class of such equations constitute differential equations with deviating arguments that, in turn, include functional-differential equations, delay differential equations, differential equations with piecewise constant argument [1]. Differential equations with piecewise-constant argument of generalized type are introduced in the work [2]. Mathematical modeling of real processes often leads to differential equations with piecewise-constant argument of generalized type. Therefore, the questions of solvability of boundary value problems for such equations are of great importance and relevance.

By a new unknown functions [3] problem (1)-(3) is reduced to a family of problems for system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type and unknown functions. It is shown that the solvability of problem (1)-(3) is equivalent to the solvability of of family problems. Methods for solving problem (1)-(3) are proposed.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855726).

References

[1] Wiener J., *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore 1993.

[2] Akhmet M. U., *Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type*, Nonlinear Analysis. **66**, 367–383 (2007).

[3] Assanova A. T., Dzhumabaev D. S., *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations*, J. Math. Anal. and Appl. **402**:1, 167–178 (2013).

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
Email: assanova@math.kz

EXISTENCE OF A SOLUTION OF DISCRETE EMDEN-FOWLER EQUATION CAUSED BY CONTINUOUS EQUATION

ASTASHOVA I.[1], DIBLÍK J.[2], KOROBKO E.[3]

We consider a second-order non-linear discrete equation of Emden–Fowler type

$$\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0, \tag{1}$$

where $k \in \mathbb{N}(k_0) := \{k_0, k_0+1, \dots\}$, k_0 is an integer, $u\colon \mathbb{N}(k_0) \to \mathbb{R}$ is an unknown solution, $\Delta u(k) := u(k+1) - u(k)$ is its first-order forward difference, $\Delta^2 u(k) = \Delta(\Delta u(k))$ is its second-order forward difference, and α, m are real numbers

We study the asymptotic behaviour of the solutions of equation (1) when $k \to \infty$ and we suppose to prove that there exists a solution to equation (1) such that

$$u(k) \sim a_\pm k^{-s}, \tag{2}$$

where $s := \alpha + 2/(m-1)$, $a_\pm := [\mp s(s+1)]^{1/(m-1)}$. We will assume that the sign $+$ in equation (1) is admissible only in the case of m having the form of a ratio of integers p/q where the difference $p-q$ is odd.

The form of a possible solution in the right-hand side of (2) is suggested by continuous Emden-Fowler equation

$$y''(x) \pm k^\alpha y^m(x) = 0$$

having exact solution $y(x) = a_\pm x^{-s}$.

Theorem 1. *Let $s > -1$, $m \neq 0$ and $m \neq 1$. Assume that there exist positive numbers ε_i, $i = 1, ..., 4$ such that either*

$$ms > 0, \ \ \varepsilon_3 < \varepsilon_1, \ \ \varepsilon_2 > \varepsilon_4, \ \ \varepsilon_3 > ms\varepsilon_1/(s+2), \ \ \varepsilon_4 > ms\varepsilon_2/(s+2),$$

or

$$ms < 0, \ \ \varepsilon_3 < \varepsilon_1, \ \ \varepsilon_2 > \varepsilon_4, \ \ \varepsilon_3 > -ms\varepsilon_2/(s+2), \ \ \varepsilon_4 > -ms\varepsilon_1/(s+2).$$

Then, for sufficiently large fixed k_0, there exists a solution $u\colon \mathbb{N}(k_0) \to \mathbb{R}$ of equation (1) such that inequalities

$$-\varepsilon_1 < \left[u(k) - \frac{a_\pm}{k^s} - \frac{b_\pm}{k^{s+1}}\right] \left[\frac{b_\pm}{k^{s+1}}\right]^{-1} < \varepsilon_2,$$

$$-\varepsilon_3 < \left[\Delta u(k) - \Delta\left(\frac{a_\pm}{k^s}\right) - \Delta\left(\frac{b_\pm}{k^{s+1}}\right)\right] \left[\Delta\left(\frac{b_\pm}{k^{s+1}}\right)\right]^{-1} < \varepsilon_4$$

and

$$-\varepsilon_1 + O\left(\frac{1}{k}\right) < \left[\Delta^2 u(k) - \Delta^2\left(\frac{a_\pm}{k^s}\right) - \Delta^2\left(\frac{b_\pm}{k^{s+1}}\right)\right] \cdot \left[\Delta^2\left(\frac{b_\pm}{k^{s+1}}\frac{ms}{s+2}\right)\right]^{-1} < \varepsilon_2 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

where $b_\pm := a_\pm s(s+2)/(s+2-ms)$, hold for every $k \in \mathbb{N}(k_0)$.

The Theorem 1 makes assumptions about m and s. Nevertheless, because the parameters in Emden–Fowler equation (1) are m and α, we analyse their possible values deduced from this theorem, visualizing the results in an (m, α)-plane. All the results are illustrated by examples.

The first author was supported by Russian Science Foundation, RSF 20-11-20272. The second and the third authors were supported by the project of specific university research at Brno University of Technology, Faculty of Electrical Engineering and Communication, FEKT-S-20-6225.

References

[1] Astashova I., Diblík J., Korobko E., *Existence of a solution of discrete Emden-Fowler equation caused by continuous equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 2021, vol. 14, no. 12, p. 4159-4178. ISSN: 1937-1632.

[1]Lomonosov Moscow State University, Russia, Plekhanov Russian University of Economics, Russia. Email: ast@diffiety.ac.ru

[2]Brno University of Technology, Czech Republic. Email: diblik@vut.cz

[3]Brno University of Technology, Czech Republic. Email: jakovi300195@yandex.ru

ON ASYMPTOTIC PROXIMITY TO HIGHER ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

ASTASHOVA I.[1], BARTUŠEK M.[2], DOŠLÁ Z.[3], MARINI M.[4]

We study the existence of unbounded solutions and their asymptotic behavior for the equation

$$u^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)u^{(j)} = r(t)|u|^\lambda \operatorname{sgn} u \ , \tag{1}$$

where $\lambda > 0$, $n \geq 3$, the functions $r, a_0, \dots, a_{n-1}$ are continuous for $t \geq 0$, considered as a perturbation of the linear differential equation

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)} = 0, \tag{2}$$

and for the special case of equation (1) where $a_j(t) = 0$ as $j \neq n-2$, $a_{n-2}(t) = q(t) > 0$:

$$u^{(n)} + q(t)u^{(n-2)} = r(t)|u|^\lambda \operatorname{sgn} u, \tag{3}$$

considered as a perturbation of the linear differential equation

$$y^{(n)} + q(t)y^{(n-2)} = 0\,. \tag{4}$$

Definition 1. By a solution to (1) or (3) we mean a $\mathcal{C}^n$ function u defined on $[T_x, \infty)$, $T_x \geq 0$, satisfying (1) or (3) on $[T_x, \infty)$, and such that

$$\sup\{|u(t)| : t \geq T\} > 0 \quad \text{for any } T \geq T_x.$$

Definition 2. Equation (1) is said to be in *asymptotic proximity* to (2) if for any solution y of (2) there exists a solution u of (1) such that ultimately, i. e. for sufficiently large t,

$$u^{(i)}(t) = y^{(i)}(t)\big(1 + \delta_i(t)\big) + \varepsilon_i(t), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

where all δ_i, ε_i are continuous functions tending to 0 at infinity.

Definition 3. Equation (1) is said to be in *strong asymptotic proximity* to (2) if for any solution y of (2) there exists a solution u of (1) such that ultimately

$$u^{(i)}(t) = y^{(i)}(t) + \varepsilon_i(t), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

where all ε_i are functions of bounded variation tending to 0 at infinity.

Theorem 1. *Consider equation* (1) *with* $\lambda > 1$. *Suppose that the continuous functions* $a_0, \dots, a_{n-1}$ *satisfy*

$$\int_0^\infty t^{n-j-1}|a_j(t)|\,dt < \infty \qquad \text{for all } j \in \{0, \dots, n-1\}\,,$$

Assume that for some integer number $m \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\int_0^\infty t^{n-1+(\lambda-1)m}|r(t)|\,dt < \infty.$$

Then for any $C \neq 0$ *there exists a solution* u *to equation* (1) *satisfying, as* $t \to \infty$,

$$u^{(j)}(t) \sim \frac{C\,m!\,t^{m-j}}{(m-j)!} \qquad \text{for all } j \in \{0, \dots, m\},$$

$$u^{(j)}(t) \to 0 \quad \text{for all } j \in \{m+1, \dots, n-1\}.$$

In particular, if

$$\int_0^\infty t^{\lambda(n-1)}|r(t)|\,dt < \infty\,,$$

then (1) *is in asymptotic proximity to* (2).

Theorem 2. *Let the equation*

$$h'' + q(t)h = 0$$

be non-oscillatory. Assume that for some real number $m \in [0, n-1]$

$$\int_0^\infty t^{n-1+m\lambda+i_q}\,|r(t)|\,dt \; < \infty,$$

where $i_q = 0$ *in the case* $\int_0^\infty tq(t)\,dt < \infty$ *and* $i_q = 1$ *in the case* $\int_0^\infty tq(t)\,dt = \infty$.

Then for any solution y *to* (4) *such that* $y(t) = O(t^{\,m})$ *there exists a solution* u *to* (3) *such that ultimately*

$$u^{(i)}(t) = y^{(i)}(t) + \varepsilon_i(t), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

where all ε_i *are functions of bounded variation tending to 0 at infinity, i.e.* (3) *is in strong asymptotic proximity to* (4).

As a corollary, we obtain more precise result on the strong asymptotic proximity of (3) to (4).

Remark 1. Some methods of proofs and some previous authors' results are contained in [1]—[4]. Related results can be found in [5] and [6].

The research of I. Astashova has been supported by RSF (Project 20-11-20272.), the research of M. Bartušek and Z. Došlá has been supported by the grant GA20-11846S of the Czech Science Foundation.

References

[1] Astashova, I.V: On the asymptotic behavior at the infinity of solutions to quasi-linear differential equations. Math. Bohem. **135**, 373-382 (2010).
[2] Bartušek M., Cecchi M., Došlá Z., Marini M: *Asymptotics for higher order differential equations with a middle term*, J. Math. Anal. Appl. 388, 1130–1140, (2012). doi:10.1016/j.jmaa.2011.10.059.
[3] Bartušek M., Došlá Z., Marini M: *Oscillation for higher order differential equations with a middle term*, Bound. Value Probl. **2**014, 48, 1–18 (2014).
[4] Astashova, I. V.: *On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations.* Tatra Mt. Math. Publ., 63:31-38, 2015.
[5] Kiguradze I T.: *An oscillation criterion for a class of ordinary differential equations,* Differ. Uravn. **28**, 201–214 (1992).
[6] Philos Ch. G., Purnas I. K., Tsamatos P. Ch.: *Asymptotic to polynomials solutions for nonlinear differential equations,* Nonlinear Anal. **59**, 1157-1179 (2004).

[1]Lomonosov Moscow State University, Plekhanov Russian University of Economics, Russia. Email: ast.diffiety@gmail.com

[2]Masaryk University, Brno, Czech Republic. Email: bartusek@math.muni.cz

[3]Masaryk University, Brno, Czech Republic. Email: dosla@math.muni.cz

[4]University of Florence, Italy. Email: mauro.marini@unifi.it

ON THE EXTREMUM CONTROL PROBLEM WITH POINT OBSERVATION FOR A PARABOLIC EQUATION

ASTASHOVA I.V.[1], FILINOVSKIY A.V.[2], LASHIN D.A.[3]

We consider the mixed problem for parabolic equation:

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \tag{1}$$
$$(x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T), \;\; T > 0,$$
$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad t \in (0,T), \tag{2}$$
$$u(x,0) = \xi(x), \quad x \in (0,1). \tag{3}$$

Here a, b and h are smooth functions in $\overline{Q}_T$, $0 < a_1 \leq a(x,t) \leq a_2 < \infty$, $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\psi \in W_2^1(0,T)$, $\xi \in L_2(0,1)$. We study the extremum control problem for the functional

$$J[z,\rho,\varphi] = \int_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2 \rho(x) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z, \tag{4}$$

where $u_\varphi \in V_2^{1,0}(Q_T)$ is a weak solution (see [4, 5, 6]) of the problem (1) — (3) with the control function φ. Here $\rho(x) \in L_\infty(0,T)$ is a weight function, $\operatorname{ess} \inf\limits_{t\in(0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$. Let the functions z and ρ be fixed. Consider the minimization problem

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi]. \tag{5}$$

Theorem 1. *Let u be a solution of the problem* (1) — (3) *with nonnegative boundary and initial functions:* $\operatorname{ess} \inf\limits_{t\in(0,T)} \varphi \geq 0$, $\operatorname{ess} \inf\limits_{t\in(0,T)} \psi \geq 0$, $\operatorname{ess} \inf\limits_{x\in(0,1)} \xi \geq 0$. *Then the solution u is nonnegative too:*

$$\operatorname{ess} \inf_{(x,t)\in Q_T} u \geq 0.$$

Theorem 2. *Let $a_t \geq 0$, $b_x - h \geq 0$, $(x,t) \in Q_T$; $b \geq 0$, $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,T]$, $x_0 \in (0,1]$; $b(1,t) \leq 0$, $t \in [0,T]$. Then for the solution u of the problem* (1) — (3) *the inequality*

$$\|u(x_0,t)\|_{L_1(0,T)} \leq \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + \frac{x_0}{a_1}\left(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}\right),$$

holds.

Theorem 3. *Let x_0 and a, b, d satisfy the conditions of Theorem 2. Then the following inequality holds:*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geq \max\left\{0, \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2} \right.$$
$$\left. - \frac{x_0}{a_1}\left(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}\right)\right\}.$$

Theorem 4. *For any $z \in L_2(0,T)$ there exists a unique function $\varphi_0 \in \Phi$ such that*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Theorem 5. *Let a, b, h do not depend on t and $m[z,\rho,\Phi] > 0$. Then $\varphi_0 \in \partial\Phi$.*

Theorem 6. *Let a, b, h do not depend on t and Φ_j, $j = 1,2$ are bounded convex closed sets in $W_2^1(0,T)$ such that $\Phi_2 \subset \operatorname{Int}\Phi_1$ and*

$$m[z,\rho,\Phi_1] > 0.$$

Then

$$m[z, \rho, \Phi_1] < m[z, \rho, \Phi_2].$$

Definition 1. We call the problem (1) — (3), (5) exactly controllable from the set Φ to the set Z, if for any $z \in Z$ there exists $\varphi_0 \in \Phi$ such that

$$J[z, \rho, \varphi_0] = 0. \tag{6}$$

The exact control is the function $\varphi_0 \in W_2^1(0,T)$ making the functional to vanish (6).

Theorem 7. *The set Z of all functions $z \in L_2(0,T)$ admitting exact control, i. e. such that $J[z, \rho, \varphi] = 0$ for some $\varphi \in W_2^1(0,T)$ is a first Baire category subset in $L_2(0,T)$.*

Definition 2. We call the problem (1) — (3), (5) densely controllable from Φ to Z, if for any $z \in Z$ we have

$$m[z, \rho, \Phi] = 0.$$

Theorem 8. *Let a, b, h do not depend on t. Then the problem* (1) — (3), (5) *densely controllable from $W_2^1(0,T)$ to $L_2(0,T)$.*

Remark 1. We also obtain necessary conditions for an extremum in terms of the conjugate boundary value problem.

The research was supported by RSF grant 20-11-20272.

References

[1] Astashova I. V., Filinovskiy A. V. *On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional*, Tatra Mt. Math. Publ., 71, (2018), 9 – 25.

[2] Astashova I. V., Filinovskiy A. V. *On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations*, Opuscula Math., 39, (2019), 595 – 609.

[3] Astashova I. V., Lashin D. A., Filinovskiy A. V. *Control with point observation for a parabolic problem with convection*, Trans. Moscow Math. Soc., 80 (2019), 221 – 234.

[4] Astashova I. V., Filinovskiy A. V. *Controllability and Exact Controllability in a Problem of Heat Transfer with Convection and Time Distributed Functional*, J. Math. Sci., 244, (2020), 148 – 157.

[5] Astashova Irina, Filinovskiy Alexey, Lashin Dmitriy. *On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation*, WSEAS Trans. on Appl. and Theor. Mech., 16 (2021), 187 – 192. DOI: 10.37394/232011.2021.16.21

[6] Ladyzhenskaya O. A. *Boundary value problems of mathematical physics*, Fizmatlit, Moscow, 1973 [in Russian].

[1]Lomonosov Moscow State University, Plekhanov Russian University of Economics, Russia. Email: ast.diffiety@gmail.com
[2]Bauman Moscow State Technical University, Lomonosov Moscow State University, Russia. Email: flnv@yandex.ru
[3]SPC FITO, Russia. Email: dalashin@gmail.com

ON SPECTRA OF LAPLACIAN IN FICHERA-TYPE DIRICHLET LAYERS

BAKHAREV F.L.

The main aim of the talk is to discuss the spectral problem for the Dirichlet Laplacian

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \mathcal{O}; \qquad u(x) = 0, \quad x \in \partial\mathcal{O} \tag{1}$$

in two domains $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$:

1. "Corner layer"

$$\Theta_1^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \Big| \min_{1 \le j \le n} x_j \Big| < 1 \right\}. \tag{2}$$

2. "Cross layer"

$$\Theta_2^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \min_{1 \le j \le n} |x_j| < 1 \right\}. \tag{3}$$

For $n = 2$ these domains are waveguides, and the problem (1) is well studied, see, e.g., [1] and references therein. In both domains Θ_1^2 and Θ_2^2 the continuous spectrum of the problem (1) coincides with the ray $[\frac{\pi^2}{4}, \infty)$, and there exists a unique eigenvalue $\lambda_\bullet < \frac{\pi^2}{4}$, see [2], [1, Proposition 1.2.2] for the two-dimensional corner, [3], [1, Proposition 1.5.2] for the two-dimensional cross, and also [4] for a more general setting. Numerical calculations give $\lambda_\bullet(\Theta_1^2) \approx 0.929 \cdot \frac{\pi^2}{4}$, see, e.g., [6], [1, Proposition 1.2.3], and $\lambda_\bullet(\Theta_2^2) \approx 0.66 \cdot \frac{\pi^2}{4}$, see, e.g., [1, Proposition 1.5.2].

The case $n = 3$ was considered in [5] where the domain Θ_1^3 was named the Fichera layer. For both domains $\mathcal{O} = \Theta_j^3$ $(j = 1, 2)$ it was proved that the problem (1) has at most finite number of eigenvalues below the continuous spectrum. However, the existence of an eigenvalue was supported only by computation, without a theoretical proof.

We prove the existence of the discrete spectrum for the problem (1) for $\mathcal{O} = \Theta_1^n$ and $\mathcal{O} = \Theta_2^n$ in any dimension $n \ge 3$. Then we apply the obtained results to the so-called Brownian exit times problem in these domains. For some classes of convex unbounded domains this problem is well studied, see, e.g., [7, 8, 9, 10]. For Θ_1^2 and Θ_2^2 it was considered in [11].

We note that the quantity of eigenvalues below the continuous spectrum in $\mathcal{O} = \Theta_1^n$ and $\mathcal{O} = \Theta_2^n$ for $n \geq 3$ is unknown. We conjecture that similarly to the case $n = 2$ there exists a unique eigenvalue in arbitrary dimension for both domains.

The results are mainly obtained in collaboration with Nazarov A.I and Matveenko S.G. The research was partly supported by Russian Science Foundation grant 17-11-01003.

References

[1] P. Exner, H. Kovařík, *Quantum Waveguides*, Springer, Heidelberg etc. 2015.

[2] J. Hersch, *Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme*. J. Reine Angew. Math., **218** (1965), 143–158.

[3] R.L. Schult, D.G. Ravenhall, H.W. Wyld, *Quantum bound states in a classically unbounded system of crossed wires*, Physical Review B, **39** (1989), 5476–5479.

[4] S.A. Nazarov, *Discrete spectrum of cranked, branchy, and periodic waveguides*, Algebra & Analysis, **23** (2011), N2, 206–247 (Russian); English transl.: St. Petersburg Math. J., **23** (2012), N2, 351–379.

[5] M. Dauge, Y. Lafranche, T. Ourmiéres-Bonafos, *Dirichlet Spectrum of the Fichera Layer*, Integr. Equ. Oper. Theory, **90** (2018), art. no. 60, 1–33. https://doi.org/10.1007/s00020-018-2486-y

[6] P. Exner, P. Šeba, P. Št'ovíček, *On existence of a bound state in an L-shaped waveguide*. Czech. J. Phys. B, **39** (1989), 1181–1191. https://doi.org/10.1007/BF01605319

[7] R. Bañuelos, R.D. DeBlassie, R.G. Smits, *The first exit time of planar Brownian motion from the interior of a parabola*, Ann. Probab., **29** (2001), 882–901. https://doi.org/10.1214/aop/1008956696

[8] R. Bañuelos, R.G. Smits, *Brownian motion in cones*, Probab. Theory Related Fields, **108** (1997), 299–319. https://doi.org/10.1007/s004400050111

[9] W.V. Li, *The first exit time of Brownian motion from unbounded domain*, Ann. Probab., **31** (2003), N2, 1078–1096.

[10] M. Lifshits, Z. Shi, *The first exit time of Brownian motion from a parabolic domain*, Bernoulli, **8** (2002), N6, 745–765.

[11] M.A. Lifshits, A.I. Nazarov, *On Brownian exit times from perturbed multi-strips*, Stat. & Prob. Letters, **147** (2019), 1–5.

St. Petersburg State University, Chebyshev Laboratory, Russia.
Email: f.bakharev@spbu.ru

HOMOGENIZATION OF TRAJECTORY ATTRACTORS FOR REACTION-DIFFUSION SYSTEMS IN PERFORATED DOMAINS

BEKMAGANBETOV K.A.[1], CHECHKIN G.A.[2], CHEPYZHOV V.V.[3]

We consider reaction-diffusion systems in perforated domains that contain rapidly oscillating terms in the boundary conditions and in the equations. In the problems under study, a small parameter ε characterizes the diameter of perforation holes and the oscillation rate of coefficients. We do not assume any Lipschitz condition for the nonlinear functions in the equations, so, the uniqueness theorem for the corresponding initial boundary value problem may not hold for the considered reaction-diffusion systems. We study the asymptotic behavior of trajectory attractors of the considered inital-boundary value problem as $\varepsilon \to 0+$. We apply homogenization methods and the the theory of trajectory attractors.

The homogenization of attractors for reaction-diffusion equations was studied by the authors in their recent works [1]-[3], where the reader can also find an overview of the results, historical notes, and an extensive bibliography. In particular, the cases of periodic perforated domains and scalar reaction-diffusion equations were treated in [1] and [3].

Attractors describe the behavior of solutions to dissipative nonlinear evolution equations as the time tends to infinity. Attractors show the most important limit objects of the dynamical systems, that is, sets of trajectories characterizing the entire dynamics of the model governed by evolution equations.

The theory of trajectory attractors for dissipative partial differential equations was developed in [4]. This approach is essentially useful in the study of the long-time behavior of solutions to evolution equations for which the uniqueness result for the corresponding Cauchy problems has not been proved yet (for example, the 3D Navier-Stokes system) or fails (for example, the reaction-diffusion equation considered in this report).

We prove that the trajectory attractor of the considered reaction-diffusion system in a perforated domain converge as $\varepsilon \to 0+$, to the trajectory attractor of the corresponding homogenized reaction-diffusion system with an additional "strange term" (potential).

The first author is supported by the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant No. AP08855579). The work of the second author is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00469). The work of the third author is partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20272).

References

[1] Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., and Chepyzhov V.V., Attractors and a "strange term" in homogenized equation, C.R. Mécanique 348, No 5, 351–359 (2020).

[2] Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., and Chepyzhov V.V., Strong convergence of trajectory attractors for reaction-diffusion systems with random rapidly oscillating terms, Commun. Pure Appl. Anal. 19, No. 5, 2419–2443 (2020).

[3] Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., and Chepyzhov V.V., "Strange term" in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain, Chaos Solitons Fractals 140, Article 110208 (2020).

[4] Chepyzhov V.V. and Vishik M.I., *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2002).

[1]Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Kazakhstan.
Email: bekmaganbetov-ka@yandex.kz
[2]Lomonosov Moscow State University, Russia.
Email: chechkin@mech.math.msu.su
[3]Institute for Information Transmission Problems, Russia.
Email: chep@iitp.ru

ON THE FREDHOLMNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATION IN GRAND-SOBOLEV SPACES

BILALOV B.T.[1], SADIGOVA S.R.[2]

It is considered a second order elliptic equation with nonsmooth coefficients in grand-Sobolev classes $W^2_{q)}(\Omega)$ on a bounded n-dimensional domain $\Omega \subset R^n$ with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, generated by the norm of the grand-Lebesgue space $L_{q)}(\Omega)$. These spaces are non-separable and therefore the definition of a reasonable solution in them faces certain difficulties. For this purpose, a subspace $N^2_{q)}(\Omega)$ is distinguished in which infinitely differentiable and finite functions are dense. The strict inclusion $W^2_q(\Omega) \subset N^2_{q)}(\Omega)$ holds, where $W^2_q(\Omega)$ is the classical Sobolev space. This raises specific questions dictated by the theory of spaces $W^2_q(\Omega)$, for example, the characterization of the space of traces of functions from $N^1_{q)}(\Omega)$ cannot be characterized following the classical case. In this paper, the corresponding theorems concerning traces, extensions, and compactness of a family of functions from $N^k_{q)}(\Omega)$ are proved. These results are applied to obtain a Schauder-type estimate up to the boundary. Schauder-type estimates make it possible to establish the fredholmness of the Dirichlet problem for the considered equation in spaces $N^2_{q)}(\Omega)$ with data from grand-Lebesgue type spaces that are different from

Lebesgue spaces. Therefore, the results of this work cannot be directly obtained from the results of the L_p-theory. This work is a continuation of the research carried out by the authors in articles [1, 2].

This work is supported by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) with Azerbaijan National Academy of Sciences (ANAS), Project Number: 19042020 and by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan – Grant No. EIF-BGM-4-RFTF1/2017- 21/02/1-M-19.

References

[1] Bilalov B.T., Sadigova S.R., *On solvability in the small of higher order elliptic equations in grand-Sobolev spaces*, Complex Variables and Elliptic Equations (2020) DOI: 10.1080/17476933.2020.1807965.

[2] Bilalov B.T., Sadigova S.R., *Interior Schauder-type estimates for higher-order elliptic operators in grand-Sobolev spaces*, Sahand Communications in Mathematical Analysis, Vol. 18, No.2 (2021), 129-148.

[1]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan. Email: b_bilalov@mail.ru

[2]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan. Email: s_sadigova@mail.ru

SIMPLE ERGODIC PROPERTIES OF TORUS PIECEWISE ISOMETRIES

BLANK M.L.

By now, we have learned reasonably well how to study hyperbolic (locally expanding/contracting or both) chaotic dynamical systems, thanks to a large extent to the development of the so called operator approach. Contrary to this not much is known about piecewise isometries, except for a special case of one-dimensional interval exchange transformations (IET) and a few similar very exceptional multidimensional systems. It is worth noting that IETs are fundamentally different from the general situation in the clear presence of an invariant measure (Lebesgue measure), which helps a lot in the analysis.

While the IET represent mainly pure theoretical constructions, the general piecewise isometries appear naturally in various applications like contemporary methods of machine learning, some piecewise smooth physical models (in particular Fermi-Ulam models), etc. Indeed, local translations of an IET disrupt its structure completely, while preserve the class of general piecewise isometries. Note also that the maps from this class in general are non-invertible, which adds possibilities for applications for “real life” modeling, but also additional problems for their analysis.

In general from a measure-theoretical point of view one of the first steps in the analysis of a dynamical system is the study of its invariant measures. In some cases one can easily find a "good" invariant measure (e.g., for IETs), or to prove its existence if the map, defining the dynamical system, is continuous or satisfies some special properties (e.g., piecewise expanding). For systems with singularities (e.g., discontinuities) even the question about the existence of an invariant measure might become a difficult problem. The class of piecewise isometries represents an example of the latter sort. The point is that the methods (e.g., operator approach or symbolic dynamics) well established for other types of chaotic dynamical systems do not work in this setting and one needs to look for new approaches.

Let X be a subset of the Euclidean space $\mathbf{R^d}$, $\mathbf{d \geq 1}$ equipped with a certain translationally invariant metric $\rho(\cdot, \cdot)$, and let $\{X_i\}$ be a partition of X into disjoint regions. By a *region* we mean a convex set with a nonempty interior. The union of boundary points of all regions we denote by Γ, which by definition is of zero d-dimensional Lebesgue measure.

A *piecewise isometry (PWI)* is a map $T : X \to X$, satisfying the property that its restriction to each region X_i is an isometry. We will refer to $\{X_i\}$ as a *special* partition, and to the maps $T_i|_{X_i}$ as *local* maps.

A restriction $T_{|X_i}$ is said to be an *extendable isometry* if it can be extended to an isometry T_i on the entire X such that $T_i|_{X_i} \equiv T_{|X_i}$. Correspondingly a piecewise isometry T is said to be *extendable* if its restriction to each region X_i is an extendable isometry.

The main result of our study is the following theorem about extendable torus piecewise isometries.

Theorem 1. *Let T be an extendable PWI of the unit torus X with a finite special partition $\{X_i\}$. Then there exists at least one probabilistic T-invariant measure μ_T. Additionally, if the boundary set Γ contains no periodic points, this measure is non-atomic.*

The proof of this statement, as well as a number of related results may be found in [1].

References

[1] Blank Michael, *Statistics of torus piecewise isometries*, arXiv:2106.16021.

Institute for Information Transmission Problems RAS; and National Research University "Higher School of Economics", Russia. Email: blank@iitp.ru

ON UNIFORM CONVERGENCE FOR OPERATORS IN DOMAINS FINELY PERFORATED ALONG A MANIFOLD WITH NONLINEAR ROBIN CONDITION

BORISOV D.I.[1], MUKHAMETRAKHIMOVA A.I.[2]

We consider a boundary value problem for a second order scalar differential operator H_ε with variable coefficients in a multi-dimensional domain Ω_ε finely perforated by small holes distributed along a given manifold S. This manifold is located inside a given domain Ω. The sizes of the holes and the distances between them are governed by a small parameter ε; the union of the holes is denoted θ^ε. The perforated domain Ω_ε is obtained from Ω by removing the holes θ^ε. The shapes of the holes in θ^ε are arbitrary as well as their distribution along the manifold. The equation we consider in Ω_ε reads as

$$\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j}+A_0-\lambda\right)u_\varepsilon=f$$

for a given complex parameter λ and a given function $f\in L_2(\Omega_\varepsilon)$; the differential expression (without λ) is assumed to be formally symmetric. On the external boundary of the domain we impose the Dirichlet condition, while on the boundaries of remaining holes are subject to a nonlinear Robin condition. We consider two main cases. In the first case the sizes of the holes are of the same order as the distances between them, while in the second case the sizes of the holes are much smaller than the distances between them. We show that in the second case the homogenized problem involves no boundary condition on the manifold S, while in the first case the homogenized problem involves a nonlinear δ-interaction on S.

Apart of the classification of the homogenized problems, our main result provides the estimates for the convergence rates and the main feature is that these estimates are uniform in the right hand side f.

The research was supported by Russian Science Foundation, project no. 20-11-19995.

[1]Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, Russia.
Email: borisovdi@yandex.ru
[2]Bashkir State Pedagogical University named after M. Akhmulla, Russia.
Email: albina8558@yandex.ru

ON PERIODIC SOLUTIONS FOR A FIRST-ORDER DIFFERENTIAL INCLUSION TYPE

BOUABSA A.[1], SAÏDI S.[2]

In this paper we are going to study the stability of arbitrary global periodic solution to a class of perturbed differential inclusion. Our study is mainly motivated by [1] and [5]. We study here the existence and uniqueness result which is obtained on the entire $\mathbb{R}$ for a Lipschitz single valued perturbation strongly monotone. We further prove that the unique solution is periodic when the right-hand-side is periodic in time.

References

[1] Kamenskii M., Makarenkov O., Wadippuli L.N. , Raynaud de Fitte P., Global stability of almost periodic solutions to monotone sweeping processes and their response to non-monotone perturbations, Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 30 (2018), 213-224.

[2] Saïdi S., Some results associated to first-order set-valued evolution problems with subdifferentials, J. Nonlinear Var. Anal. 5 (2) (2021), 227–250.

[3] Saïdi S., Thibault L., Yarou M., Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators, Numer. Funct. Anal. Optim. 34(10) (2013), 1156–1186.

[4] Trubinkov Y.V., Perov A.I., Differential equations with monotone nonlinearities, *"Nauka i Tekhnika"*, Minsk, (1986), 200.

[5] Wadippuli L.N., Gudoshnikov I., Makarenkov O., Global asymptotic stability of nonconvex sweeping processes, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 25(3) (2020), 1129–1139.

[1]Laboratoire LMPA, Department of Mathematics, Jijel University, Jijel, Algeria. Email: aya.bouabsa@univ-jijel.dz

[2]Laboratoire LMPA, Department of Mathematics, Jijel University, Jijel, Algeria. Email: soumiasaidi44@gmail.com

EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS FOR A HEMATOPOIESIS MODEL WITH VARIABLE DELAYS AND A NONLINEAR HARVESTING TERM

BOUAKKAZ A.[1], KHEMIS R.[2]

In this work, we investigate the following model of hematopoiesis with a time-varying delay and iterative terms:

$$x'(t) = -a(t)\,x(t) + p(t)\,\frac{x(t-\tau(t))}{1+x^{[2]}(t)} - h\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right), \tag{1}$$

where $x^{[2]}(t) = x(x(t))$, $a, p, \tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, (0, \infty))$ are $T-$periodic functions and $h : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$ is a continuous harvesting function.

Here $x(t)$ is the density of mature cells in blood circulation at time t, $a(t)$ is the rate of lost cells from the circulation, $p(t)$ is the production rate and $\tau(t)$ represents the transit time required to release mature cells into the circulating bloodstream.

By using the Green's functions method as well as Schauder's fixed point theorem, we derive some sufficient criteria that ensure the existence and uniqueness of positive periodic solutions for equation (1).
For $T > 0$, let X be the Banach space of $T-$periodic continuous functions equipped with the supremum norm and

$$\Omega = \{x \in P_T,\ 0 \leq x \leq M,\ |x(t_2) - x(t_1)| \leq L|t_2 - t_1|,\ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

is a closed convex and bounded subset of Ω.

Throughout this work, we need the following assumptions:

$$h(t+T, x, y) = h(t, x, y),\ \text{for all } t, x, y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\exists k_1, k_2 > 0 : |h(t, x_1, x_2) - h(t, y_1, y_2)| \leq \sum_{i=1}^{2} k_i |x_i - y_i|, \tag{3}$$

and

$$p(t) \frac{\varphi(t - \tau(t))}{1 + \varphi^{[2]}(t)} - h\left(s, \varphi(t), \varphi^{[2]}(t)\right) > 0,\ \forall t \in [0, T]. \tag{4}$$

Furthermore, for $H_0 = \sup_{t \in [0,T]} h(t, 0, 0)$ and $\beta = \frac{\exp\left(\int_t^T a(u)du\right)}{\exp\left(\int_t^T a(u)du\right) - 1}$, we assume that

$$T\beta(H_0 + (k_1 + k_2 + \|p\|) M) \leq M, \tag{5}$$

and

$$\beta(2 + T\|a\|)(H_0 + (k_1 + k_2 + \|p\|) M) \leq L. \tag{6}$$

The conversion of equation (1) into an equivalent integral one, allows us to define an integral operator $\mathcal{A} : \Omega \to X$ as follows:

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \int_t^{t+T} \left[p(s) \frac{\varphi(s - \tau(s))}{1 + \varphi^{[2]}(s)} - h\left(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s)\right)\right] G(t, s)\, ds,$$

where

$$G(t, s) = \frac{\exp\left(\int_t^s a(u)\, du\right)}{\exp\left(\int_t^T a(u)\, du\right) - 1}.$$

Theorem 1. *If conditions* (2)−(6) *hold, then equation* (1) *has at least one positive periodic solution in* Ω.

Theorem 2. *Besides the hypotheses of theorem* 1*, we suppose that*

$$\beta T\left(\|p\|+k_2\left(1+L\right)+k_1\right)<1. \tag{7}$$

Then, the solution of equation (1) *is unique.*

References

[1] Bouakkaz A., Khemis R., *Positive periodic solutions for a class of second-order differential equations with state-dependent delays*, Turkish Journal of Mathematics 44(4), 1412–1426, 2020.

[2] Bouakkaz A., Khemis R., *Positive periodic solutions for revisited Nicholson's blowflies equation with iterative harvesting term*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 494(2), 124663, 2021.

[3] Mackey M. C., Glass L., *Unified Hypothesis for the Origin of Aplastic Anemia and Periodic Hematopoiesis*, Blood, 51(5), 941-956, 1978.

[1]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955, Skikda, Algeria.
Email: ahlemkholode@yahoo.com

[2]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955, Skikda, Algeria.
Email: kbra28@yahoo.fr

VIRTUAL LEVELS OF LINEAR OPERATORS IN BANACH SPACES

BOUSSAID N.[1], COMECH A.[2]

Virtual levels of Schrödinger operators (also known as *threshold resonances*) admit several equivalent characterizations: *(1)* there are corresponding *virtual states* from a space *slightly larger* than L^2; *(2)* there is no limiting absorption principle in the vicinity of a virtual level (e.g. no weights such that the "sandwiched" resolvent is uniformly bounded); *(3)* an arbitrarily small perturbation can produce an eigenvalue. We develop a general approach to virtual levels of operators in Banach spaces and provide applications to Schrödinger operators with nonselfadjoint potentials and in any dimension, deriving optimal estimates on the trace of the resolvent [1, 2]. In particular, we prove the following results.

Let A be a closed densely defined operator in the Banach space $\mathbf{X}$. Assume that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{F}$ are Banach spaces such that $\mathbf{E}\subset\mathbf{X}\subset\mathbf{F}$ (as sets) and that A has a closed densely defined extension $\hat{A}:\ \mathbf{F}\to\mathbf{F}$.

Theorem 1 (Limiting absorption principle vs. virtual states)**.** *Assume that Ω is an open connected subset of $\mathbb{C}$ such that $\Omega\cap\sigma(A)=\emptyset$ and that $z_0\in\sigma(A)\cap\partial\Omega$. The following two statements are equivalent:*

1. $r \in \mathbb{N}_0$ is the smallest value such that there is a bounded finite rank operator $B : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ such that the resolvent $(A+B-z)^{-1}$ has a limit as $z \to z_0$, $z \in \Omega$,

$$(A + B - z_0 I)^{-1}_{\Omega,\mathbf{E},\mathbf{F}} := \underset{z\to z_0,\, z\in\Omega}{\text{w-lim}} (A + B - z_0 I)^{-1}_{\Omega,\mathbf{E},\mathbf{F}} : \mathbf{E} \to \mathbf{F} \tag{1}$$

in the weak operator topology of mappings $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$.

2. Dimension of the space of solutions to the problem

$$(\hat{A} - z_0 I)\Psi = 0, \qquad \Psi \in \operatorname{Range}\big((A + B - z_0 I)^{-1}_{\Omega,\mathbf{E},\mathbf{F}}\big) \tag{2}$$

equals r. Here $B : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ is any finite rank operator (or, more generally, any A-compact operator) such that the limit (1) exists.

Definition 1 (Virtual levels)**.** If the statements in Theorem 1 hold with $r = 0$, we say that z_0 is a *regular point of the essential spectrum of A relative to* $(\Omega, \mathbf{E}, \mathbf{F})$. If $r \geq 1$, we say that z_0 is a *virtual level of A of rank r relative to* $(\Omega, \mathbf{E}, \mathbf{F})$. The solutions to the problem (2) are called *virtual states* corresponding to virtual level z_0 (relative to $(\Omega, \mathbf{E}, \mathbf{F})$).

Theorem 2 (Virtual levels vs. bifurcations)**.** *Assume that Ω is an open connected subset of $\mathbb{C}$ such that $\Omega \cap \sigma(A) = \emptyset$ and that $z_0 \in \sigma(A) \cap \partial\Omega$.*

(1) If there is a sequence of bounded operators $V_j : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$, $j \in \mathbb{N}$, with $\lim_{j\to\infty} \|V_j\|_{\mathbf{F}\to\mathbf{E}} = 0$, and a sequence of eigenvalues $z_j \in \sigma_{\mathrm{d}}(A + V_j) \cap \Omega$, $z_j \to z_0$, then z_0 is not a regular point of $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ relative to $(\Omega, \mathbf{E}, \mathbf{F})$.

(2) Assume that z_0 is a virtual level of A of finite rank $r \geq 1$ relative to $(\Omega, \mathbf{E}, \mathbf{F})$, and moreover assume that there is a finite rank operator $B : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ such that there is a limit $\underset{z\to z_0,\, z\in\Omega}{\text{s-lim}} (A+B-zI)^{-1}$ in the strong operator topology *of mappings $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$. There is $\delta > 0$ such that for any sequence $z_j \in \Omega \cap \mathbb{D}_\delta(z_0)$, $j \in \mathbb{N}$, $z_j \to z_0$, there is a sequence of finite rank operators*

$$V_j : \mathbf{F} \to \mathbf{E}, \qquad \|V_j\|_{\mathbf{F}\to\mathbf{E}} \to 0, \qquad z_j \in \sigma_{\mathrm{d}}(A + V_j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Here is an application of the theory to the limiting absorption principle of Schrödinger operators in $\mathbb{R}^2$ near $z_0 = 0$ (previously unknown).

Theorem 3. *Let $V \in C_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. There is a limit of $(-\Delta + V - zI)^{-1}$ as $z \to z_0$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ in the weak operator topology of mappings $L^2_s(\mathbb{R}^2) \to L^2_{-s'}(\mathbb{R}^2)$, s, $s' > 1$ if and only if there is no solution $\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ to the equation $(-\Delta + V - z_0 I)\Psi = 0$.*

References

[1] Boussaid N., Comech A., *Virtual levels and virtual states of linear operators in Banach spaces. Applications to Schroedinger operators*, arXiv:2101.11979.

[2] Boussaid N., Comech A., *Limiting absorption principle and virtual levels of operators in Banach spaces*, Ann. Math. Quebec (2021), to appear. arXiv:2109.07108.

[1]Université Bourgogne Franche-Comté, Besançon, France.
Email: nabile.boussaid@univ-fcomte.fr

[2]Texas A&M University, College Station, TX, USA; IITP, Moscow.
Email: comech@tamu.edu

CONTINUAL MODEL OF HYPERCYCLE REPLICATION

BRATUS A.S.[1], CHMEREVA O.S.[2]

Continual model of hypercycle replication in a form of nonlinear integro–differential equation with delayed in space variable are considered. The existence and uniqueness theorem together with non-negativity solution are proved. Spatially nonhomogeneous steady state solution is considered. It is proved the existence of closed trajectories for sufficiently small diffusion coefficient. The results of computational modelling are presented.

This investigations are supported by RFBI grant № 20-04-60157.

[1]Russian University of Transport, Russia.
Email: alexander.bratus@yandex.ru

[2]Moscow State University, Russia. Email: o.s.ch@yandex.ru

ON THE SOLVABILITY OF A THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

BRAVYI E.I.

We consider a boundary value problem

$$\dot{x}(t) = (T^{+}x)(t) - (T^{-}x)(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) + x(1) = 2x(c), \tag{2}$$

where $c \in (0,1)$ is a given point, T^{+} and T^{-} are linear *positive* operators, acting from the space of real continuous functions $\mathbf{C}[0,1]$ into the space of real integrable functions $\mathbf{L}[0,1]$ with the standard norms, $f \in \mathbf{L}[0,1]$ (here positive operators map continuous non-negative functions into non-negative integrable functions). An absolutely continuous function $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ is called a solution of problem (1)–(2) if it satisfies equation (1) for almost all $t \in [0,1]$ and satisfies three-point boundary value condition (2).

If we put $c = 0$ or $c = 1$, then condition (2) coincides with the periodic boundary value condition. Integral necessary and necessary conditions for the unique solvability of the periodic boundary value problem for equation (1) in terms of two quantities $\int_0^1 (T^+\mathbf{1})(s)\,ds$ and $\int_0^1 (T^-\mathbf{1})(s)\,ds$ are known [1] (here $\mathbf{1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is the unit function).

Various three-point boundary value problems are also considered for functional differential equations (see, for example, [2, 3]). Similar integral necessary and sufficient conditions for three point problems, in particular, problem (1)–(2), as far as we know, have not yet been obtained. It is natural to consider the conditions for the unique solvability of this problem in terms of four parameters, namely, the integrals of $T^+\mathbf{1}$ and $T^-\mathbf{1}$ over intervals $[0,c]$ and $[c,1]$:

$$\int_0^c (T^+\mathbf{1})(s)\,ds \equiv P_L, \quad \int_c^1 (T^+\mathbf{1})(s)\,ds \equiv P_R, \tag{3}$$

$$\int_0^c (T^-\mathbf{1})(s)\,ds \equiv M_L, \quad \int_c^1 (T^-\mathbf{1})(s)\,ds \equiv M_R. \tag{4}$$

We are interested in the structure of the uniquely solvable set $\Omega \in \mathbb{R}^4$, that is, the set of all points (P_L, P_R, M_L, M_R) for which any problem (1)–(2) with positive linear operators T^+, T^- satisfying the equalities (3)–(4) is uniquely solvable.

It is easy to construct the set of unique solvability for two zero parameters $M_L = 0$ and $P_R = 0$. This section of Ω plays an important role in the construction of the entire solvability set.

Theorem 1. *Let $M_L = 0$ and $P_R = 0$. Let non-negative numbers P_L, M_R be given. Boundary value problem (1)–(2) is uniquely solvable for all linear positive operators T^+, T^- satisfying the equalities (3)–(4) if and only if*

$$P_L \in (0,4), \;\; M_R = 0,$$

$$0 \le P_L < \begin{cases} 2\,(1 - M_R + \sqrt{1 - M_R}), \;\; M_R \in (0, 3/4), \\ M_R/(2\,M_R - 1), \;\; M_R \in [3/4, 3/2), \\ (1 - M_R + \sqrt{2\,M_R + 1})/2, \;\; M_R \in [3/2, 4). \end{cases}$$

But in general case conditions of solvability (necessary and sufficient) turn out to be rather complicated.

The work is performed as part of the State Task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 1.5336.2017/8.9).

References

[1] Hakl R., Lomtatidze A., Puza B. On periodic solutions of first order linear functional differential equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 49(7), (2002), 929–945.
[2] Chen G., Wang W., Shen J., Luo Z. Three-point boundary value problems for second-order functional differential equations. Applied Mathematical Sciences, 1(3), (2007), 133–144.
[3] Rontó A., Rontó M. On nonseparated three-point boundary value problems for linear functional differential equations. Abstract and Applied Analysis, 2011, article ID 326052.

Perm National Research Polytechnic University, Russia.
Email: bravyi@perm.ru

EXISTENCE AND UNIQUENESS RESULTS FOR A CLASS OF ITERATIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

CHOUAF S.[1], KHEMIS R.[2], BOUAKKAZ A.[3]

This work is devoted to investigate the following nonlinear second-order boundary problem with iterative terms:

$$\begin{cases} x''(t) = -f\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right) + \frac{d}{dt} g\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right) \\ +\frac{d^2}{dt^2} g\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right), \ 0 < t < b, \\ x(0) = 0, \ \alpha \int_0^\eta x(s)\, ds = x(b) \ \text{ with } \eta \in (0,b), \ \alpha \in \mathbb{R}^*, \end{cases} \tag{1}$$

where $x^{[2]}(t) = x(x(t))$ and $f, g : [0,b] \times \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ are continuous functions with respect to the first variable and are globally Lipschitz-continuous with respect to the other variables. By virtue of Schauder's fixed point theorem, we establish the existence of bounded solutions. Moreover, under an additional condition, and by the help of the contraction mapping principle, we prove the uniqueness and continuous dependence of the sought solution. For $\eta \in (0,b)$, let

$$\mathcal{CB}_{Int} = \left\{ x \in \mathcal{C}([0,b], \mathbb{R}) : x(0) = 0, \ \alpha \int_0^\eta x(s)\, ds = x(b), \ \alpha \in \mathbb{R}^*, \right\},$$

endowed with the supremum norm, be a Banach space and
for $0 \le L \le b$ and $M \ge 0$, let

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathcal{CB}_{Int}, \ 0 \le x \le L, \\ |x(t_2) - x(t_1)| \le M |t_2 - t_1|, \ \forall t_1, t_2 \in [0,b] \end{array} \right\},$$

a closed convex and bounded subset of $\mathcal{CB}_{Int}$.

Moreover, we assume that

$$b\zeta\left(\frac{|\alpha|\,\eta^3+3b^2}{3\,|2b-\alpha\eta^2|}+\frac{1}{2}b\right)+\frac{b\left(2b+\alpha\eta^2+2\alpha\eta+4\right)-\alpha\eta^2}{|2b-\alpha\eta^2|}\omega\leq L, \tag{2}$$

$$\left(\begin{array}{c}\frac{\zeta\left(3b^2+\eta^3|\alpha|\right)}{3|2b-\alpha\eta^2|}+\zeta b+\frac{\omega(4b+2\alpha+2\alpha\eta)}{|2b-\alpha\eta^2|}\\ +k_0+\sum_{i=1}^{2}k_i\sum_{j=0}^{i-1}M^{j+1}\end{array}\right)\leq M, \tag{3}$$

where $\rho=\sup\limits_{s\in[0,b]}|f(s,0,0)|$ and $\zeta=\rho+L\sum_{i=1}^{2}c_i\sum_{j=0}^{i-1}M^j$.

Theorem 1. *Suppose that conditions* (2) *and* (3) *hold. Then problem* (1) *has at least one positive bounded solution* x *in* Γ.

For $i=1,2$, let c_i and k_i be the Lipschitz constants for f and g respectively.

Theorem 2. *Under hypotheses of Theorem 1, assume further that*

$$\begin{array}{c}\left(b\left(\frac{3b^2+|\alpha|\eta^3}{3|2b-\alpha\eta^2|}+\frac{1}{2}b\right)\sum_{i=1}^{2}c_i\sum_{j=0}^{j=i-1}M^j\right)\\ +\left(\frac{b\left(2b+\alpha\eta^2+2\alpha\eta+4\right)-\alpha\eta^2}{|2b-\alpha\eta^2|}\sum_{i=1}^{2}k_i\sum_{j=0}^{j=i-1}M^j\right)<1,\end{array} \tag{4}$$

then problem (1) *has a unique solution in* Γ.

Theorem 3. *Suppose that the conditions of Theorem 2 hold. The unique solution of* (1) *depends continuously on functions* f *and* g.

References

[1] Bouakkaz A., Ardjouni A., Djoudi A., *Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation with iterrative terms by Schauder's fixed point theorem*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae 87(2), 223-235, 2018,.

[2] Bouakkaz A., Khemis R., *Positive periodic solutions for a class of second-order differential equations with state-dependent delays*, Turkish Journal of Mathematics 44(4), 1412-1426, 2020.

[3] Chouaf S., Bouakkaz A., Khemis R., *On bounded solutions of a second-order iterative boundary value problem*, Turkish Journal of Mathematics, In press 2021.

[4] Chouaf S., Khemis R., Bouakkaz A., *Some Existence Results on Positive Solutions for an Iterative Second-order Boundary-value Problem with Integral Boundary Conditions*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, In press 2020.

[1]LAMAHIS Laboratory University of 20 August 1955 Skikda, Algeria.
Email: safachouaf905@gmail.com

[2]LAMAHIS Laboratory University of 20 August 1955 Skikda, Algeria.
Email: kbra28@yahoo.fr

[3]LAMAHIS Laboratory University of 20 August 1955 Skikda, Algeria.
Email: ahlemkholode@yahoo.com

OPTIMAL CYCLIC DYNAMIC OF DISTRIBUTED POPULATION UNDER PERMANENT AND IMPULSE HARVESTING

DAVYDOV A.A.[1], VINNIKOV E.V.[2]

We consider on n-dimensional torus a distributed renewable resource, the dynamic of which is described by equation of Kolmogorov-Piskunov-Petrovsky-Fisher type in the divergent form

$$p_t = (\alpha(x)p_x)_x + a(x)p - b(x)p^2, \tag{1}$$

where $p = p(x,t)$ is the density of the resource at the point x at time t, functions α, a and b characterize the diffusion of the resource, the rates of its renewal and saturation of the environment with it, respectively. It is assumed that the last two functions are measurable and bounded. In addition, it is assumed that the saturation rate b is positive and separated from zero by some positive constant, the matrix α is positive definite, and its elements have derivatives satisfying the Hölder condition with some positive exponent. Such conditions are imposed on the saturation and diffusion rates in the paper [1], some of the results from which are used in our studies.

The resource is exploited in two modes simultaneously. The first one is permanent harvesting of a part of current density of the resource, that adds to equation (1) the term $-u(x)p$ to its right hand side. A measurable function u characterizes this harvesting, it is considered as *control* and satisfies condition $U_1 \le u \le U_2$ everywhere on the torus with some measurable bounded functions U_1 and U_2. Such a control is called *admissible*. The second is a periodic impulse harvesting of a share of the resource. In this mode, the available effort E to harvest or a part of this effort is distributed over the torus with a measurable *effort density* $r = r(x)$, which everywhere on the torus satisfies the constraints $R_1 \le r \le R_2$ with some nonnegative bounded measurable functions R_1, R_2, $R_1 \ne R_2$. Such effort density is also called *admissible*. Admissible efforts exist iff $\int\limits_{\mathbb{T}^n} R_1(x)dx \le E$. It is assumed that this condition is fulfilled. Besides we account the effect of both the difficulty of resource detecting or extracting, depending on both the point of the resource area and the effort density applied at this point, namely, the harvest proportion is defined as

$$1 - e^{-\gamma(x)r(x)},$$

where a nonnegative continuous (or measurable) function γ reflects this complexity.

The evolution of the resource density between subsequent impulse harvesting is defined by the solution of the Cauchy problem for the studied equation (1) with the additional term $-u(x)p$ in righthand side and the initial data that are the resource density after the impulse harvesting.

We prove that if $\int\limits_{\mathbb{T}^n} R_1(x)dx \leq E$ then there exists admissible harvesting strategy $\{u, r\}$, which provide maximum time averaged income over all admissible strategies, if the initial resource density is no less its limit density without any harvesting.

This research continues the studies in [2], [3], [4], but it differs from them in the mode of harvesting, which is mixed here, and, as a consequence, in the formulation of the optimization problem, although the basic ideas of the proofs are from these works.

The research was supported by RSF grant 19-11-00223.

References

[1] Berestycki H., Hamel F., and Roques L., *Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence,* J. Math. Biol. **51** (1), 75–113 (2005)

[2] Davydov A. A., *Existence of Optimal Stationary States of Exploited Populations with Diffusion,* Proc. Steklov Inst. Math. **310**, 124–130 (2020)

[3] Davydov A. A., and Melnik D. A., *Optimal States of Distributed Exploited Populations with Periodic Impulse Harvesting,* Proc. Steklov Inst. Math. **315** (Suppl. 1), S1–S8 (2021).

[4] Belyakov A. O., and Davydov A. A., *Optimal Cyclic Harvesting of a Distributed Renewable Resource with Diffusion,* Proc. Steklov Inst. Math. **315**, 1–9 (2021).

[1]Lomonosov Moscow State University and NUST MISIS, Russia.
Email: davydov@mi-ras.ru

[2]NUST MISIS and Lomonosov Moscow State University, Russia.
Email: evinnikov@gmail.com

STABILITY IN METRICS C^0, C^1 AND ABSOLUTE STABILITY OF NEUTRAL SYSTEMS WITH NONLINEARITY OF LURIE TYPE

DIBLÍK J.

In the talk we consider absolute stability of a system of nonlinear differential equations of neutral type

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + D\dot{x}(t-\tau) + bf(\sigma(t)), \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \colon [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}^n$, A, B and D are $n \times n$ constant matrices, b is an n-dimensional column constant vector, $\tau > 0$ is a constant delay, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, is a Lurie-type nonlinear function satisfying Lipschitz condition, $\sigma(t) := c^T x(t)$ and c is a column n-dimensional constant vector where the superscript T denotes the transpose.

The exponential C^0 stability of (1) is studied. Its proof is carried out by the Lyapunov-Krasovskii method of functionals. Then, the exponential C^1 stability of (1) is studied and final result on absolute stability of (1) is formulated. The results are illustrated by an example.

References

[1] Diblík J., Khusainov Denys Ya., Shatyrko A., Baštinec J., Svoboda Z., *Absolute Stability of Neutral Systems with Lurie Type Nonlinearity*, Advances in Nonlinear Analysis, to appear.

Brno University of Technology, Czech Republic. Email: diblik@vut.cz

VERSION OF FLOQUET THEORY FOR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

DOMOSHNITSKY A.

We propose a version of the Floquet theory for first order functional differential equation

$$x'(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(t)x(t - \tau_i(t)) = 0, \ t \in [0, \infty), \tag{1}$$

assuming that $a_j(t) = a_j(t + \omega)$, $\tau_j(t) = \tau_j(t + \omega)$, $t - \tau_j(t) \geq 0$, $\int\limits_0^\infty \sum\limits_{j=1}^m a_j(t)dt = \infty$ for $j = 1, ..., m$, $t \geq 0$. The Floquet formula of solutions' presentation is proposed. On this basis new assertions on stability are obtained.

Ariel University, Ariel, Israel. Email: adom@ariel.ac.il

HOMOGENIZATION OF NONSTATIONARY PERIODIC EQUATIONS AT THE EDGE OF A SPECTRAL GAP

DORODNYI M.A.

In $L_2(\mathbb{R})$, we consider a second-order elliptic differential operator A_ε, $\varepsilon > 0$, given by the differential expression

$$A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2} V(x/\varepsilon). \tag{1}$$

Here g is a measurable function such that $0 < \alpha_0 \leqslant g(x) \leqslant \alpha_1 < \infty$, $g(x + 1) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, and $V \in L_1(0, 1)$, $V(x + 1) = V(x)$, $x \in \mathbb{R}$. We assume that $\inf \operatorname{spec} A = 0$, $A := A_1$.

It is well known that homogenization for operator (1) is a threshold effect near the edge of its spectrum. The spectrum of operator (1) has a band structure and may have gaps. Does it make sense to associate analogs of homogenization problems with the edges of internal gaps? We study this issue for a nonstationary Schrödinger equation and a hyperbolic equation involving the operator A_ε.

Let $\sigma > 0$ be a (non-degenerate) left edge of a band with odd number s in the spectrum of the operator A. Let $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Consider the Cauchy problems

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} v_\varepsilon(x,t) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,t) + \varepsilon^{-2}\sigma v_\varepsilon(x,t), \\ v_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x),\ (\partial_t v_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon g)(x), \end{cases} \tag{3}$$

where

$$(\Upsilon_\varepsilon f)(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(k) \sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx} \varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k) \chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\, dk.$$

Here $\{e^{ikx}\varphi_j(x,k)\}_{j=s}^{\infty}$ are the Bloch waves corresponding to the spectral bands of the operator A with numbers $j \geqslant s$,

$$\widetilde{\Omega}_j = (-j\pi, -(j-1)\pi] \cup ((j-1)\pi, j\pi], \quad j \in \mathbb{N},$$

are the Brillouin zones, and $(\Phi f)(k)$ is the Fourier image of a function $f(x)$. We prove the following estimates

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma} \varphi_\sigma(\cdot/\varepsilon) u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon \|f\|_{H^2(\mathbb{R})}, \quad f \in H^2(\mathbb{R}), \tag{4}$$

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_\sigma(\cdot/\varepsilon) v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon (\|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}), \quad f \in H^{3/2}(\mathbb{R}),\ g \in H^{1/2}(\mathbb{R}), \tag{5}$$

where u_0 and v_0 are the solutions of the effective problems

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t} u_0(x,t) = (A_\sigma^{\mathrm{hom}} u_0)(x,t), \\ u_0(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} v_0(x,t) = -(A_\sigma^{\mathrm{hom}} v_0)(x,t), \\ v_0(x,0) = f(x),\ (\partial_t v_0)(x,0) = g(x), \end{cases}$$

$A_\sigma^{\mathrm{hom}} = -b_\sigma \frac{d^2}{dx^2}$, $b_\sigma > 0$ is the coefficient in the asymptotics of the band function $E(k) = E_s(k)$: $E(k) \sim \sigma + b_\sigma k^2$, $k \sim 0$; and $\varphi_\sigma(x) = \varphi_s(x,0)$ is the periodic solution of the equation $A\varphi_\sigma = \sigma\varphi_\sigma$, normalized in $L_2(0,1)$.

These results are sharp with respect to the norm type as well as with respect to the dependence on t. The other edges of the spectral gaps have also been studied. The results are published in [1].

This research was supported by Young Russian Mathematics award and Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075-15-2019-1619.

References

[1] Dorodnyi M. A., *High-frequency homogenization of nonstationary periodic equations*, St. Petersburg Mathematical Society Preprint # 2021-05, `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2021/index.html#05` (in Russian).

Leonhard Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg State University, Russia. Email: mdorodni@yandex.ru

DELTA-SHAPED PERTURBATIONS OF THE LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR ON A TWO-DIMENSIONAL SPHERE

DOSMAGULOVA K.[1], KANGUZHIN B.E.[2]

In a Hilbert space H with scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and norm $\|\cdot\|_0$ consider a closed linear operator B with domain $D(B)$ dense in H. We assume that

$$KerB \neq \{0\}, Ran(B) = HanddimKer(B) = m < \infty.$$

We define an additional norm $\|\cdot\|_1$ on the domain $D(B)$ and denote the closure by $D(B)$ this norm by W. We assume that the additional norm $\|\cdot\|_1$ is stronger than the norm $\|\cdot\|_0$, that is $\forall x \in D(B) \subset H$ the inequality $\|x\|_0 \leq C\|x\|_1$ holds. It is clear that the embedding $W \subset H$ has been completed. In the dual space W^* we choose a system m of linearly independent functionals $U_1, ..., U_m$. Then there is a unique system of elements $\{\varphi_1, ..., \varphi_2\}$ from $Ker(B)$, subject to the conditions

$$\langle U_t; \varphi_r\rangle = \delta_{tz}, t, z = 1, 2, ..., m$$

where $\langle U_t; \varphi_r\rangle$ means the value of the functional U_t on the element φ_r, and δ_{tz} is a Kronecker symbol.

Let Λ_0 is an invertible restriction of the operator B. The operator Λ, is defined by the formula $\Lambda u = Bu$ on the domain

$$D(\Lambda) = \left\{ u \in D(B) : u = \Lambda_0^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s\left(\Lambda_0^{-1} f\right), \forall f \in H \right\}$$

Theorem 1. *Operator Λ is an invertible operator, and*

$$\Lambda^{-1}f = \Lambda_0^{-1}f\sum_{s=1}^{m}\varphi_s \cdot U_s\left(\Lambda_0^{-1}f\right), \forall f \in H.$$

Moreover, for the resolvents $(\Lambda-\lambda I)^{-1}$ and $(\Lambda_0-\lambda I)^{-1}$ the second generalized Hilbert identity is valid:

$$(\Lambda-\lambda I)^{-1}f = (\Lambda_0-\lambda I)^{-1}f - \sum_{s=1}^{m}\Lambda(\Lambda-\lambda I)^{-1}\varphi_s U_s((\Lambda_0-\lambda I)^{-1}f)$$

Note that the inequality $D(\Lambda) \neq D(\Lambda_0)$ can hold.

The Laplace-Beltrami operator is considered on the two-dimensional unit sphere: $\Lambda_{S^2}\Phi = -\left[\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - ctg\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\theta}\right]$, which plays the role of the operator Λ_0. The eigenvalues of the operator Λ_0 have the form $\lambda_l = l(l+1)$, where $l \geq 0$ are integers. Each eigenvalue λ_l has a multiplicity $2l+1$. They correspond to their eigenfunctions

$$\hat{Y}_l^m \begin{cases} P_l^m(cos\theta)cosm\varphi, m = 0, ..., l \\ P_l^{|m|}(cos\theta)sin|m|\varphi, m = -1, -2..., -l. \end{cases}$$

Green's function of the operator Λ_0 has the form

$$\varepsilon(\varphi,\theta;\alpha,\beta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l(l+1)}\sum_{m=l}^{-l}Y_l^m(\varphi,\theta)Y_l^m(\alpha,\beta).$$

The indicated Green's function satisfies the representation

$$\varepsilon(\varphi,\theta;\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2(1-sin\alpha sin\varphi - cos\alpha cos\varphi cos(\theta-\beta)}}.$$

Let choose as $\Phi_0(\phi,\theta) = \varepsilon(\phi,\theta,\phi_0,\theta_0)$,
$\Phi_1(\phi,\theta) = \frac{\partial}{\partial\beta}\varepsilon(\phi,\theta,\phi_0,\theta_0)$,
$\Phi_2(\phi,\theta) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varepsilon(\phi,\theta,\phi_0,\theta_0)$, where (ϕ,θ) is a fixed point. Further, according to the above scheme, a biorthogonal system of functionals U_0, U_1, U_2 is constructed. Then, according to Theorem 1, the invertible operator Λ is written out. The operator Λ can be interpreted as a delta-shaped perturbation of the Laplace-Beltrami operator on a two-dimensional sphere.

This work was financially supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855402, IMMM).

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan.
Email: karlygash.dosmagulova@gmail.com

[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan.
Email: kanguzhin53@gmail.com

ON THE ASYMPTOTICAL NORMALITY FOR THE SYSTEM "FIELD–CRYSTAL"

DUDNIKOVA T.V.

The talk is devoted to study of the long-time behavior of distributions of solutions for infinite-dimensional Hamiltonian systems. As a model, we consider a linear Hamiltonian system consisting of a real scalar Klein–Gordon field $\psi(x)$ and its momentum $\pi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, coupled to a "simple" lattice described by the deviations $u(k) \in \mathbb{R}^n$ of "atoms" and their velocities $v(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $d, n \geq 1$. The Hamiltonian functional of the coupled field–crystal system reads

$$H(\psi, u, \pi, v) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(|\nabla\psi(x)|^2 + m_0^2 |\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2 \Big)\, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Big(\sum_{j=1}^{d} |u(k+e_j) - u(k)|^2 + \nu_0^2 |u(k)|^2 + |v(k)|^2 \Big)$$
$$+ \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} R(x-k) \cdot u(k) \psi(x)\, dx.$$

Here $m_0, \nu_0 > 0$, the coupled function $R(x)$ is an $\mathbb{R}^n$-valued smooth function, exponentially decreasing at infinity. This system can be considered as the description of the motion of electrons (so-called *Bloch electrons*) in the periodic medium which is generated by the ionic cores.

For the coupled system, we study the Cauchy problem with the initial data $Y_0 = (\psi_0, u_0, \pi_0, v_0)$. We assume that the initial data Y_0 belong to the real phase space $\mathcal{E}_\alpha^s$.

Definition 1. $\mathcal{E}_\alpha^s := H_\alpha^{1+s}(\mathbb{R}^d) \oplus [\ell_\alpha^2(\mathbb{Z}^d)]^n \oplus H_\alpha^s(\mathbb{R}^d) \oplus [\ell_\alpha^2(\mathbb{Z}^d)]^n$, where $H_\alpha^s(\mathbb{R}^d)$ are the weighed Sobolev spaces, $s, \alpha \in \mathbb{R}$.

Assume that the initial state $Y_0(p)$ ($p \in \mathbb{R}^d \cup \mathbb{Z}^d$) of the system is a measurable random function with the distribution μ_0. The initial measure μ_0 is a Borel probability measure in $\mathcal{E}_\alpha^0$ which is translation-invariant with respect to the subgroup $\mathbb{Z}^d$ in two half-spaces $p_1 > a$ and $p_1 < -a$ with some $a > 0$. Given $t \in \mathbb{R}$, denote by μ_t the probability measure that gives the distribution of the solution $Y(t) = (\psi(\cdot,t), u(\cdot,t), \pi(\cdot,t), v(\cdot,t))$ to the Cauchy problem with the random initial state Y_0. We study the asymptotics of μ_t as $t \to \pm\infty$. The main result is the following theorem.

Theorem 1. *The measures μ_t weakly converge to a limiting measure μ_∞ as $t \to \infty$ in the spaces $\mathcal{E}^s_\beta$ for any $s < 0$ and $\beta < \alpha < -d/2$. Moreover, the measure μ_∞ is a stationary Gaussian measure which is translation-invariant with respect to the group $\mathbb{Z}^d$. The explicit formulas for limiting correlation functions are given.*

We prove the weak convergence of the measures by using the strategy of [6]. In the case when the initial measure μ_0 is translation-invariant with respect to the subgroup $\mathbb{Z}^d$, Theorem 1 was proved in [2]. Also, we consider the case when the measure μ_0 is a Gaussian measure in $\mathcal{E}^s_\alpha$, with $s, \alpha < -d/2$, and initially some infinite "parts" of the system have Gibbs distributions with different temperatures. In this case, we calculate the limiting mean energy current density in the terms of the correlation functions of μ_0. The similar results were obtained for the harmonic crystals in [1, 4] and for the Klein–Gordon fields in [3, 5].

References

[1] Dudnikova T. V., Komech A. I., Mauser N. // J. Stat. Phys. 114:3/4 (2004), 1035–1083.

[2] Dudnikova T. V., Komech A. I. // Russ. J. Math. Phys. 12:3 (2005), 301–325.

[3] Dudnikova T. V., Komech A. I. // Theory Probab. Appl. 50:4 (2006), 582–611.

[4] Dudnikova T. V. // Russ. J. Math. Phys. 26:4 (2019), 429–453.

[5] Dudnikova T. V. // Izv. Math. 85:5 (2021), 932–952.

[6] Vishik M. I., Komech A. I., Fursikov A. V. // Russian Math. Surveys, 34:5 (1979), 149–234.

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Russia.
Email: tdudnikov@mail.ru

CONSERVATION OF THE INTEGRABILITY PROPERTY OF C^1-SMOOTH MAPS OBTAINED BY SMALL PERTURBATIONS OF SKEW PRODUCTS

EFREMOVA L.S.

Let J, J' be closed intervals in the real line, and $J^2 = J \times J'$ be a closed rectangle in the plain. In the recent papers [1]–[3] maps of the form

$$\Phi(x, y) = (f(x) + \mu(x, y),\ g_x(y)),\ \text{where}\ (x, y) \in J^2, \tag{1}$$

were considered under the following conditions:
(i_Φ) maps (1) are C^1-smooth on J^2;
(ii_Φ) $\Phi(\partial J^2) \subset \partial J^2$, where $\partial(\cdot)$ is the boundary of a set;
(i_μ) the equality $\mu(x, y) = 0$ holds for every $(x, y) \in \partial J^2$;
(i_f) f is Ω-stable in the space of C^1-smooth self-maps of the interval J with

the invariant boundary;
(ii_μ) the standard C^1-norm of μ satisfies some conditions of smallness that is connected with the previous condition (i_f).

We prove the existence of the invariant lamination and the integrability property of the map (1) on the support of this lamination. We study the periodic trajectories of maps (1) and construct new examples.

References

[1] Efremova L. S., "Small C^1-smooth perturbations of skew products and the partial integrability property," Applied Math. and Nonlinear Sci. **42**, 317–328 (2020).

[2] L. S. Efremova, "Small perturbations of smooth skew products and Sharkovsky's theorem," J. of Difference Equat. and Applic. **26** (8), Special issue on the occasion of the 82-nd birthday of Oleksandr M. Sharkovsky, 1192–1211 (2020).

[3] L. S. Efremova, "Geometrically integrable maps in the plane and their periodic orbits," Lobachevskii J. Math. **42** (10), 2315–2324 (2021).

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod; Moscow Institute of Physics and Technology, Russia. Email: lefunn@gmail.com

ON ODD-ORDER QUASILINEAR EVOLUTION EQUATIONS WITH GENERAL NONLINEARITY

FAMINSKII A.V.

On an interval $(0,R)$ for an arbitrary $R>0$ consider an initial-boundary value problem for an equation

$$u_t-(-1)^l(\partial_x^{2l+1}u+a_{2l}\partial_x^{2l}u) \\ -\sum_{j=0}^{l-1}(-1)^j\partial_x^j\big[a_{2j+1}(t,x)\partial_x^{j+1}u+a_{2j}(t,x)\partial_x^j u\big] \\ +\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\partial_x^k\big[g_k(t,x,u,\dots,\partial_x^{l-1}u)\big]=f(t,x),\quad l\in\mathbb{N},$$

with an initial condition

$$u(0,x)=u_0(x)$$

and boundary conditions

$$\partial_x^j u(t,0)=\partial_x^j u(t,R)=0,\ j=0,\dots,l-1,\quad \partial_x^l u(t,R)=\nu(t).$$

Equations of such a type are the class of quasilinear evolution dispersive equations describing wave processes in various media.

It is assumed that $a_{2l} \leq 0$, the coefficients a_j for $j \leq 2l-1$ are small in some sense or have appropriate signs, the functions $g_k(t,x,y_0,\dots,y_{l-1})$ satisfy certain growth restrictions with respect to y_j. Then for small functions $u_0 \in L_2(0,R)$, $\nu \in L_2(0,+\infty)$ and $f \in L_2((0,+\infty)\times(0,R))$ there exists a unique weak solution to the considered problem $u(t,x)$ such that $u \in C([0,T];L_2(0,R))$, $\partial_x^l u \in L_2((0,T)\times(0,R))$ $\forall T>0$. Moreover, if ν and f decay exponentially when $t \to +\infty$ then the solution also decays exponentially in $L_2(0,R)$.

The obtained results can be applied for the Kaup–Kupersmidt equation (for example)

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + c_1u^2u_{xxx} + c_2uu_xu_{xx} + c_3u_x^3 + c_4uu_{xxx}+ \\ + c_5u_xu_{xx} + c_6u^2u_x + c_7uu_x = 0,$$

for which there is no global a priori estimate for solutions in the space $L_2(0,R)$ without assumptions on their certain smallness.

The results were published in paper [1].

The author was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

References

[1] Faminskii A. V., *Odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity on bounded intervals* // Lobachevskii J. Math., **42**:5 (2021), 875-888.

RUDN University, Moscow, Russia. Email: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

FREE BOUNDARY PROBLEM OF MAGNETOHYDRODYNAMICS FOR TWO LIQUIDS

FROLOVA E.V.

We consider the free boundary problem of magnetohydrodynamics, which describes the motion of two viscous incompressible liquids under the action of magnetic field. The interface between the liquids is unknown. Let the bounded variable domain Ω_{1t} is filled by the first liquid. The domain Ω_{1t} is surrounded by the bounded variable domain Ω_{2t}, filled by the second liquid. The boundary of Ω_{2t} consists of two disjoint components: the free surface Γ_t and the external given boundary S which is a perfectly conducting closed surface. We assume that both Γ_0 and S are homeomorphic to a sphere, $dist\{\Gamma_0, S\} \geq \delta > 0$.

We assume that the initial position of the free boundary Γ_0 is a small normal perturbation of the given smooth closed surface G

$$\Gamma_0 = \{x = y + \mathbf{N}(y)\rho_0(y), \quad y \in G\},$$

where $N(y)$ is the external normal to the surface G, ρ_0 is a given function, $|\rho_0| \leq \frac{\delta}{4}$. We are looking for the free boundary in the similar form

$$\Gamma_t = \{x = y + \mathbf{N}(y)\rho(y,t), \quad y \in G\},$$

where the function $\rho(y,t)$ is unknown, and use the Hanzawa coordinate transform to reduce the MHD free boundary problem to the problem in a domain with a given boundary. We obtain the solvability result for the corresponding linear two-phase problem for the magnetic field [1] and prove the local solvability of the free boundary MHD problem in Sobolev-Slobedetskii spaces $W_2^{2+l,1+l/2}$, $1/2 < l < 1$ in the 3-dimentional case.

Then, we consider the free boundary MHD problem in the multi-dimentional case. The maximal $L_p{-}L_q$ regularity result for the linearised two-phase problem for the magnetic field is obtained in [2]. This part of the talk is based on the joint work with Prof. Y. Shibata.

References

[1] Frolova E. V., *Linearization af a free boundary problem of magnetohydrodynamics* , Problemy Math. Analiza, V. 95 (2018), p. 69-78, translated in J. Math. Sci. V.235, N 3 (2018), p. 322-333.

[2] Frolova E. V., Shibata Y., *On the maximal L_p-L_q regularity theorem of the linearized Electro-Magnetic field equatins with interface condition*, Zap. Nauchn. Sem. POMI **489** (2020), p. 130-172.

St. Petersburg State Electrotechnical University, St. Petersburg State University, Russia. Email: elenafr@mail.ru

NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR HEAT-ELECTRICITY EQUATIONS

GALKIN V.A.

The process of direct transformation of heat energy to electricity is considered. The effect is based on electrons generation on heated emitters in chain of elements (EGE) which are connected in series. The mathematical model of above mentioned phenomenon is based on system of nonlinear boundary-value problems for equations

$$u^{''}(x) + f(x, u(x)) = 0, \quad 0 < x < l.$$

The dependence of function f on argument u is non-linear due to Stephan-Boltzmann radiation law for heated bodies and is of polynomial form. Similarly behavior of f is produced by non-linearity of electric characteristics for EGE.

The justification of effective numerical methods are described for above mentioned problems and regularization is applied to the boundary-value problem with Stephan-Boltzmann heat non-linearity.

The symbols V_e, V_k are used as notification for potentials of emitter and collector respectively. The index i points out the relation of value under consideration to $i-$ th EGE in chain which consists of n elements.

The system of equations for the potentials is written below

$$V_{i,e}^{''} + \beta_{i,e} j(V_{i,e} - V_{i,k}) = 0, \tag{1}$$

$$V_{i,k}^{''} + \beta_{i,k} j(V_{i,e} - V_{i,k}) = 0, \qquad 0_i < x < h_i,$$

where β_e, β_k are positive constants and j is current density. The following boundary conditions hold

$$\frac{1}{\beta_{k,i}} u_i^{'}(0_i) = \gamma \sum_{s=1}^{n} (\frac{1}{\beta_{k,s}} u_s(h_s) + \frac{1}{\beta_{e,s}} u_s(0_s)), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\beta_{k,i}} u_i^{'}(0_i) + \frac{1}{\beta_{e,i}} u_i^{'}(h_i) = 0,$$

where positive constant γ is defined as

$$\gamma = [R(\frac{1}{\beta_{e,n}} + \frac{1}{\beta_{k,n}}) + \sum_{i=1}^{n} h_i]^{-1}.$$

The boundary-value problem (1), (2) is solved by the regularization method. It is supposed that current density has bounded negative derivative such that

$$-A \leq \frac{\partial j}{\partial u} \leq -\delta,$$

where A and δ are positive constants. Suppose the value $k \geq A$. Let us consider the functional space

$$H = \{u\}, \;\; u = (u_1, u_2, , u_n\}, \;\; u_i \in W_2^1[0_i, h_i], \;\; 1 \leq i \leq n.$$

The norm on Hilbert space H is defined as following

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{0_i}^{h_i} [k u_i^2 + (u_i^{'2}] \, dx \beta_{e,i}^{-1} \beta_{k,i}^{-1}.$$

The operator $P: \; H \to H$ is defined by relations

$$u = P(v),$$

$$u_i^{''} - k(u_i - v_i) + (\beta_{e,i} + \beta_{k,i}) j_i(u_i, x) = 0, \; 0_i < x < h_i, \; 1 \leq i \leq n,$$

$$\frac{1}{\beta_{k,i}} u_i^{'}(0_i) = \gamma \sum_{s=1}^{n} (\frac{1}{\beta_{k,s}} u_s(h_s) + \frac{1}{\beta_{e,s}} u_s(0_s)),$$

$$\frac{1}{\beta_{k,i}} u_i^{'}(0_i) + \frac{1}{\beta_{e,i}} u_i^{'}(h_i) = 0,$$

Theorem 1. *Operator P has unique fixed point and boundary-value problem* (1), (2) *has an unique solution when regularization applied to the Stephan-Boltzmann law.*

The research was supported by RFBR grant 20-07-00236.

Surgut State University, Russia. Email: val-gal@yandex.ru

BLOW-UP FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR MEMORY CONDITION AND VARIABLES COEFFICIENTS

GLADKOV A.

We investigate the global solvability and blow-up in finite time for semilinear heat equation with a nonlinear memory boundary condition:

$$u_t = \Delta u + c(t)u^p \text{ for } x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = k(t) \int_0^t u^q(x,\tau)\, d\tau \text{ for } x \in \partial\Omega, \ t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ for } x \in \Omega, \tag{3}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$, $p > 0$ and $q > 0$. Here $c(t)$ and $k(t)$ are nonnegative continuous functions for $t \geq 0$. The initial datum $u_0(x)$ is a nonnegative $C^1(\overline{\Omega})$ function which satisfies the boundary condition at $t = 0$.

We prove global existence of solutions of (1)–(3).

Theorem 1. *If* $\max(p,q) \leq 1$, *then every solution of* (1)–(3) *is global.*

If $\max(p,q) > 1$ solutions of (1)–(3) may tend to infinity for finite time.

Theorem 2. *There are not nontrivial global solutions of* (1)–(3) *if*

$$p > 1 \ \textit{and} \ \int_0^\infty c(t)\, dt = \infty$$

or

$$q > 1, \ k(t) \geq \underline{k}(t) \geq 0 \ \textit{and} \ \int_0^\infty t\underline{k}(t)\, dt = \infty$$

and at least one of the following conditions is fulfilled

$$\underline{k}(t) \leq \frac{c}{t^2} \text{ for large values of } t,\, c > 0,$$

or

$$t^{1-q}\underline{k}(t) \text{ is nonincreasing for large values of } t.$$

Let $\min(p, q) > 1$. To formulate global existence result for problem (1)–(3) we suppose that

$$\int_0^\infty (c(t) + tk(t))\, dt < \infty \tag{4}$$

and there exist positive constants α, t_0 and K such that $\alpha > t_0$ and

$$\int_{t-t_0}^t \frac{\tau k(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \leq K \text{ for } t \geq \alpha. \tag{5}$$

Theorem 3. *Let* $\min(p, q) > 1$ *and* (4), (5) *hold. Then problem* (1)–(3) *has bounded global solutions for small initial data.*

Similar results we obtain for the case $p = 1, q > 1$.
The results of the talk have been published in [1].

References

[1] Gladkov A., Guedda M. Global existence of solutions of semilinear heat equation with nonlinear memory condition. Appl. Anal. 2020;99(16):2823–2832.

Belarusian State University, Belarus. Email: gladkoval@mail.ru

ON THE WENTZELL CONDITION FOR ONE EVOLUTION EQUATION

GONCHAROV N.S.[1], ZAGREBINA S.A.[2], SVIRIDIUK G.A.[3]

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, be a bounded connected domain with the boundary $\partial\Omega$ of the class C^∞. In cylinder $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T \in \mathbb{R}_+$, let us consider the linear Dzekzer equation

$$\begin{gathered}(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha_0 \Delta u(x,t) - \beta_0 \Delta^2 u(x,t) - \\ -\gamma u(x,t) + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T.\end{gathered} \tag{1}$$

which modeling the evolution of the free surface of the filtered liquid [1]. In particular, the authors are interested in the solutions, which must satisfy both to Wentzell boundary conditions

$$\Delta u(x,t) + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_1 u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

and to Roben boundary conditions

$$\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_2 u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

as well as the initial Cauchy condition

$$\lim_{t\to 0+} (u(x,t) - u_0(x)) = 0,\ x \in \Omega. \tag{4}$$

Here $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha_k,\ \beta_k,\ \gamma \in \mathbb{R}_+,\ k = 0,1$ are real parameters characterizing the medium; the function $f(x,t)$ corresponds to liquid sources, $\nu = \nu(x)$ is a external unit normal to $\partial\Omega$. In this report the authors, taking into account the use of methods of the theory of degenerate holomorphic semigroups, construct exact solutions for the linear Dzekzer equation with Wentzel and Roben boundary conditions. In particular, for suitable spaces $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{F}$ the following theorem is proved.

Theorem 1. *Let $\lambda \in \sigma(\Delta)$ and the coefficients $(\alpha_0, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ and $\beta \in \mathbb{R}_+$ are such, that no eigenvalue $\lambda_k \in \sigma(\Delta)$ is the root of the equation $\beta_0\xi^2 - \alpha_0\xi + \gamma = 0$. Then for any $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ and $u_0 \in \mathfrak{U}$ such that*

$$\sum_{\lambda_k=\lambda} \langle u_0, \varphi_k\rangle \varphi_k = \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(0), \varphi_k\rangle_{\mathfrak{F}} \varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma},$$

there exists the unique solution $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{U})$ to Cauchy–Wentzell problems (1)–(4), where the solution $u = u(t)$ has the following form

$$u(t) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' e^{t\mu_k} \langle u_0, \varphi_k\rangle_{\mathfrak{F}} \varphi_k + \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(t), \varphi_k\rangle_{\mathfrak{F}} \varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} {\sum_{k=1}^{\infty}}' (\lambda - \lambda_k)^{-1} \int_0^t ds \int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)} \langle f(s), \varphi_k\rangle_{\mathfrak{F}} \varphi_k}{\mu - \mu_k} d\mu\ ,$$

where the dash at the sign of the sum means that there are no summands with numbers k such that $\lambda = \lambda_k$.

The research was partially funded by RFBR and Chelyabinsk Region, project number 20-41-740010.

References

[1] *Dzektser E. S.* Generalization of the equation of motion of ground waters with free surface // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1972. – vol. 202, issue 5. – 1031–1033 pp.

[2] *Denk R., Kunze M., Ploss D.* The Bi-Laplacian with Wentzell boundary conditions on Lipschitz domains // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2021. – vol. 93, issue 2. – Article ID 13. – 26 p.

[3] Goncharov N.S., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Showalter–Sidorov and Cauchy Problems for the Linear Dzektser Equation with Wentzel and Robin Boundary Conditions in a Bounded Domain. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2022. (in print)

[1]South Ural State University, Russia. Email: goncharovns@susu.ru

[2]South Ural State University, Russia. Email: zagrebinasa@susu.ru

[3]South Ural State University, Russia. Email: sviridiukga@susu.ru

FOURIER TRANSFORMS WITH NON-TRIVIAL KERNEL AND INVERSION THEOREMS

GORSHKOV A.V.

Usualy Fourier transform F can be associated with some operator A with the full set of generalised eigen functions. It lead to inversion formulas for F^{-1} as well as Plancherel equity. But if A has the non-zero kernel, then the system of generalised eigen functions should be complemented by ordinary eigen functions $\{e_k\}$ associated with eigenvalue $\lambda = 0$ for which Plancherel-Parseval equity like

$$\|f\|^2 = \|F[f]\|^2 + \sum_k (f, e_k)^2$$

holds.

We study Weber-Orr transform in the space of square-integrable functions $L_2(r_0, \infty; r)$ with infinitesimal element $r\,\mathrm{d}\,r$:

$$W_{k,k\pm1}[f](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J^2_{k\pm1}(\lambda r_0) + Y^2_{k\pm1}(\lambda r_0)}} f(s)sds,$$

$$W^{-1}_{k,k\pm1}[\hat{f}](r) = \int_{0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda r)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J^2_{k\pm1}(\lambda r_0) + Y^2_{k\pm1}(\lambda r_0)}} \hat{f}(\lambda)\lambda d\lambda,$$

where $r_0 > 0$, $k \in \mathbb{R}$, $J_k(r)$, $Y_k(r)$ are the Bessel functions of the first and second kind respectively.

Lemma 1. *For $k > 1$ function $1/r^k \in \ker(W_{k,k-1})$, and for $k < -1$ $r^k \in \ker(W_{k,k+1})$.*

Theorem 1. *Let $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0,\infty) \cap L_2(r_0,\infty)$, $r_0 > 0$, $k \in \mathbb{R}$. Then the Weber-Orr transforms satisfy almost everywhere*

$$f(r) = W^{-1}_{k,k-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right](r), k \leq 1,$$

$$f(r) = W^{-1}_{k,k-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right](r) + \frac{2(k-1)r_0^{2(k-1)}}{r^k}\int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1}f(s)ds, k > 1,$$

$$f(r) = W^{-1}_{k,k+1}\left[W_{k,k+1}[f]\right](r), k \geq -1,$$

$$f(r) = W^{-1}_{k,k+1}\left[W_{k,k+1}[f]\right](r) - \frac{2(k+1)r^k}{r_0^{2(k+1)}}\int_{r_0}^{\infty} s^{k+1}f(s)ds, k < -1.$$

and the following Plancherel-Parseval equity holds:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \leq 1, \\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)} \\
&+ 2(k-1)r_0^{2(k-1)}\left(f, 1/r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k > 1, \\
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k+1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \geq -1, \\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)} \\
&- \frac{2(k+1)}{r_0^{2(k+1)}}\left(f, r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k < -1.
\end{aligned}$$

References

[1] Titchmarsh, E.C.: Weber's integral theorem. Proc. Lond. Math. Soc. 22:2, 15-28 (1924).

[2] Nasim, C: Associated Weber integral transforms of arbitrary order. Ind. J. Pure & Appl. Math. 20:11, 126-1138 (1989).

[3] Gorshkov, A. Associated Weber-Orr Transform, Biot-Savart Law and Explicit Form of the Solution of 2D Stokes System in Exterior of the Disc. J. Math. Fluid Mech. 21, 41 (2019). https://doi.org/10.1007/s00021-019-0445-2

Moscow State University, Russia. Email: alexey.gorshkov.msu@gmail.com

VANISHING TOPOLOGY OF MATRIX SINGULARITIES

GORYUNOV V.V.

We are considering local singularities of holomorphic families of arbitrary square, symmetric and skew-symmetric matrices, that is, of mappings of smooth manifolds to the matrix spaces. Our main object is the vanishing topology of the pre-images of the hypersurface Δ of all degenerate matrices in assumption that the dimension of the source is at least the codimension of the singular locus of Δ in the ambient space.

We will notice that the complex link of Δ is homotopic to a sphere of the middle dimension and give a geometric interpretation of such spheres. This will allow us to introduce vanishing cycles on the *singular Milnor fibre* of a matrix family, that is, on the local inverse image of Δ under a generic perturbation of the family. According to Lê and Siersma, such a fibre is a wedge of middle-dimensional spheres. It turns out that in some important cases, which include all simple matrix singularities, the number μ_Δ of the spheres in the wedge is equal to the relevant Tjurina number τ of the family. This allows to formulate a general $\mu_\Delta = \tau$ conjecture for matrix singularities.

I will also introduce two kinds of bifurcation diagrams of matrix singularities. For simple matrix families, there is a version of the Lyashko-Looijenga theorem for the larger diagrams, while the smaller ones are the discriminants of the Weyl and Shephard-Todd groups.

The talk is mainly based on the paper [1].

References

[1] Goryunov V., *Vanishing cycles of matrix singularities*, J. Lond. Math. Soc. (2) 103 (2021), no. 3, 991–1015.

University of Liverpool, United Kingdom. Email: goryunov@liverpool.ac.uk

IDENTIFYING, MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE OPERATION OF ASYNCHRONOUS MOTOR

GOURI N.[1], MIHOUB M. L.[2], BENDJAMA H.[3]

In this talk, we study the steady-state operation of motor-converter system. However, difficulties arise during the operation of this system. These difficulties present discontinuities on time. In order to avoid this problem we will try in our study to investigate in numerical analysis, applying mathematical techniques in differential equations which model the operation of the system. We aim in this work to optimize the functioning of the system and its efficiency.

References

[1] Jannot X., *Modélisation et optimisation d′un ensemble convertisseur-machine*, Application aux systèmes *d′entrainement* à haute vitesse, Diss. Supélec, 2010.

[2] Kateb H., Rioux-Damidau F., *Modélisation par séries de Fourier du fonctionnement en régime permanent d′un ensemble machine-convertisseur*, Revue de physique appliquée, 1988 (1988), 149–159.

[3] Rioux-Damidau F., *Modélisation des machines cylindriques synchrones sans fer*, Prise en compte de la longueur finie du rotor, Revue de physique appliquée, 20(4) 1985, 235–242.

[1]Laboratory of Mathematical Modeling and Numerical Simulation, Department of Mathematics, University of Annaba, Algeria.
Email: gou.nesrine@gmail.com

[2]Laboratory of Mathematical Modeling and Numerical Simulation, Department of Mathematics, University of Annaba, Algeria.
Email: mihoubmedlarbi@yahoo.fr

[3]Research Center in Industrial Technologies CRTI, P.O.Box. 64, Cheraga, 16014 Algiers, Algeria. Email: h.bendjama@crti.dz

CONFORMAL INVARIANCE OF THE STATISTICS OF THE ZERO-ISOLINES OF $2d$ SCALAR FIELDS IN INVERSE TURBULENT CASCADES

GREBENEV V.N.[1], WACŁAWCZYK M.[2], OBERLACK M.[3]

This study concerns conformal invariance of certain statistics in $2d$ turbulence. Namely, there exists numerical evidence by Bernard et al. [Nature Phys. **2**, 2006], that the zero-vorticity isolines $\mathbf{x}(l,t)$ for the $2d$ Euler equation with an external force and a uniform friction belong to the class of conformally invariant random curves. Based on this evidence, the CG invariance was formally proven in [Grebenev et al. J. Phys. A: Math. Theor, **50**, 2017] by a Lie group analysis for the 1-point probability density function (PDF) governed by the inviscid Lundgren-Monin-Novikov (LMN) equations for $2d$ vorticity fields under the zero external force field. In this work we consider the first equation from the LMN chain for $2d$ scalar fields under Gaussian white-in-time forcing and large-scale friction. With this, the flow can be kept in a statistically steady state and the analysis is performed for the stationary LMN. Specifically, for the inviscid case we prove the CG invariance of the 1-point statistics of the zero-isolines $\mathbf{x}(l)$ of a scalar field, i.e. the CG invariance of the probability $f_1(\mathbf{x}(l),\phi)d\phi$ that a random curve $\mathbf{x}(\mathbf{l})$ passes through the point $\mathbf{x}$ with $\phi = 0$ for $l = l_1$. We show an example, where the proposed transformations represent a change between PDF's describing homogeneous and non-homogeneous fields. Possible implications of this result are discussed. The results presented are published in Phys. Rev. Fluids 6, 084610 (2021).

Vladimir Grebenev acknowledges the financial support of FAPESP Foundation, Brazil (Grant No. 2021/09845-0).

[1]Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.
Email: vngrebenev@gmail.com

[2]Institute of Geophysics, University of Warsaw, Poland.
Email: marta.waclawczyk@igf.fuw.edu.pl

[3]Technische Universität Darmstadt, Germany.
Email: oberlack@fdy.tu-darmstadt.de

LANDIS' PROOF OF HARNACK INEQUALITIES

GRIGOR'YAN A.A.

We present the approach of E.M. Landis to the proof of the uniform Harnack inequality for second order elliptic equations both in divergence form (theorem of Moser [6]) and in non-divergence form (theorem of Krylov-Safonov [4]). Different parts of this method were published in [3] and [5].

This approach has been recently used in [1] and [2] in order to prove the Harnack inequality in the setting of Dirichlet forms on fractal-type spaces.

The research was supported by SFB1283 of the German Research Council.

References

[1] Grigor'yan A., Hu E., Hu J., *Two-sided estimates of heat kernels of jump type Dirichlet forms*, Adv. Math. **330** (2018), 433–515.

[2] Grigor'yan A., Hu J., Lau K. -S., *Generalized capacity, Harnack inequality and heat kernels on metric spaces*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 1485–1549.

[3] Kondratiev V. A, Landis E. M., *Qualitative theory of linear second-order partial differential equations* (in Russian), Itogi Nauki i Techniki, serija Sovremennye Problemy Matematiki, Fundamental'nye Napravlenija **32**, VINITI, Moscow, 1988, 99–215. English translation: Partial Differential Equations III, Encyclopedia of Math. Sci. **32**, Springer, 1990.

[4] Krylov N. V., Safonov M. V. *A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients* (in Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR **44** (1980), 81–98. English translation: Math. USSR Izvestija **16** (1981), 151–164.

[5] Landis E. M., *The second order equations of elliptic and parabolic types* (in Russian), Nauka, Moscow, 1971. English translation: Transl. of Mathematical Monographs **171**, AMS publications, 1999.

[6] Moser J. *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 577-591.

University of Bielefeld, Germany. Email: grigor@math.uni-bielefeld.de

ON GRADIENT-LIKE FLOWS WITHOUT HETEROCLINIC INTERSECTION

GUREVICH E.Y.

We will say that gradient-like flow f^t belongs to a class $G(M^n)$, where M^n is connected closed oriented manifold of dimension $n \geq 3$, if:

(a) Morse index (dimension of unstable manifold) of any saddle equilibrium state of the flow f^t equals either 1 or $n-1$;

(b) invariant manifolds of different saddle equilibria do not intersect.

Denote by ν_{f^t} and μ_{f^t} the numbers of saddle and node equilibria of the flow $f^t \in G(M^n)$ and set

$$g_{f^t} = (\nu_{f^t} - \mu_{f^t} + 2)/2.$$

Everywhere below $\mathcal{S}^n_g$ stands for manifold which homeomorphic either to the sphere $\mathbb{S}^n$ if $g = 0$ or to connected sum of $g > 0$ copies of $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Theorem 1. *Let $f^t \in G(M^n)$, $n \geq 2$. Then M^n is homeomorphic to $\mathcal{S}^n_{g_{f^t}}$.*

For $n = 2$ Theorem 1 immediately follows from [5] and for $n \geq 3$ it follows from [1], [2].

Theorem 2 below states that for manifolds $\mathcal{S}^n_g$, $n \geq 4$, the condition (b) implies the condition (a).

Theorem 2. *Let f^t be gradient-like flow on $\mathcal{S}^n_g$, $g \geq 0$, $n \geq 4$. If invariant manifolds of different saddle equilibria of f^t do not intersect, then Morse index of any saddle equilibrium equals 1 or $(n-1)$, that is $f^t \in G(\mathcal{S}^n_g)$. Moreover, there exists $k \geq 0$ such that $\nu_{f^t} = 2g + k$ and $\mu_{f^t} = k + 2$.*

For case $g = 0$ Theorem 2 is proved in [4], where necessary and sufficient conditions of topological equivalence of flows from class $G(S^n)$, $n \geq 3$, where obtained. Theorem 2 allows to obtain topological classification of flows from class $G(\mathcal{S}^n_g)$, $g > 0$, in combinatorial terms using techniques of [4], [3].

For any $f^t \in G(\mathcal{S}^n_g)$ we put in correspondence a bicolor graph Γ_{f^t} which describes mutual arrangement of invariant manifolds of saddle equilibria of the flow f^t, and provide the following result.

Theorem 3. *Flows $f^t, f'^r \in G(\mathcal{S}^n_g)$ are topological equivalent iff their bicolor graphs $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f'^t}$ are isomorphic by means preserving colors isomorphism.*

The research was supported by RFS, grant 21-11-00010.

References

[1] Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// Topology and its Applications. 2002. Vol. 117. P.335–344.

[2] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections// Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 208. No 1. P.81–90.
[3] Grines V., Gurevich E., Pochinka O., Malyshev D. On topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on the sphere S^n $(n > 3)$// Nonlinearity. 2020. Vol. 33. No 12. P.7088–7113.
[4] Pilyugin S. Phase diagrams that determine Morse-Smale systems without periodic trajectories on spheres// Differ. Uravn. 1978. Vol. 14. No. 2. P.245–254.
[5] Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems//Bull. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 66. P. 43–49.

NRU HSE, Russia. Email: egurevich@hse.ru

PERIODIC, PERMANENT, AND EXTINCT SOLUTIONS TO POPULATION MODELS

HAKL R.[1], OYARCE J.[2]

The existence of a critical parameter $\lambda_c > 0$ is proven for some population models, that splits the set of parameters into two parts where the existence, resp. nonexistence, of a positive periodic solution is guaranteed. Moreoever, it is shown that in a quite wide class of population models, all the positive solutions are permanent, resp. extinct ones, provided there exists, resp. does not exist, a positive periodic solution. The results are based on a theoretical research dealing with a boundary value problem for functional differential equation with a real parameter

$$u'(t) = \ell(u)(t) + \lambda F(u)(t) \quad \text{for a. e. } t \in [a, b], \qquad h(u) = 0,$$

where ℓ and $F : C([a, b]; \mathbb{R}) \to L([a, b]; \mathbb{R})$ are, respectively, linear and nonlinear operators, $h : C([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ is a linear functional, and $\lambda \in \mathbb{R}$ is a real parameter.

R. Hakl acknowledges support from RVO 67985840.
J. Oyarce acknowledges support from Chilean National Agency for Research and Development (PhD. 2018 – 21180824).

[1]Institute of Mathamatics, Czech Academy of Sciences Czech Republic.
Email: hakl@ipm.cz

[2]Dept. of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Bío-Bío, Chile.
Email: jooyarce@egresados.ubiobio.cl

FUNDAMENTALS IN PEACEMAN MODEL FOR WELL-BLOCK RADIUS FOR NON-LINEAR FLOWS

IBRAGUIMOV A.

In our talk we will present recent non-published results on PDE aspects of the flow in porous media. This research was motivated by discussion with my teacher Evgeni Mikchalovich Landis.

We consider sewing machinery between finite difference and analytical solutions defined at different scale: far away and near source of the perturbation of the flow [2]. One of the essences of the approach is that coarse problem and boundary value problem in the proxy of the source model two different flows [3]. We are proposing method to glue solution via total fluxes, which is predefined on coarse grid. It is important to mention that the coarse solution "does not see" boundary.

From industrial point of view our report can be considered as a mathematical "shirt" on famous Peaceman[1] well-block radius formula for Darcy radial flow but can be applied in much more general scenario.

This is a joint project with E. Zakirov. I. Indrupskiy, D. Anikeev from Oil ang Gas Res. Inst. of Russian Academy of Science.

References

[1] Peaceman, D.W. *Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation*, SPEJ, 183-94, June 1978; Trans., AIME, 253. Paper SPE 6893

[2] Ibragimov, A., Khalmanova, D., ValkΓi, P. P., and Walton, J. R., *On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering*,SIAM J. Appl. Math. 65, 1952 (2005).

[3] Aulisa, E, Bloshanskaya,L, Hoang, L,Ibragimov, A, *Analysis of generalized Forchheimer flows of compressible fluids in porous media*, J. Math. Phys. 50, 103102 (2009).

TTU, Lubbock, TX, SMU Dallas TX, UT Dallas, TX.
Email: akif.ibraguimov@ttu.edu

OPTIMAL BOUNDS FOR THE ATTRACTOR DIMENSION OF THE DAMPED REGULARIZED EULER EQUATIONS

ILYIN A.A.

We consider the following approximation of the damped Euler system, the so-called inviscid damped Euler–Bardina model

$$\begin{cases} \partial_t u + (\bar u, \nabla)\bar u + \gamma u + \nabla p = g, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u = (1 - \alpha\Delta)\bar u. \end{cases}$$

The system is studied for $d = 2, 3$
1) on the torus $\Omega = \mathbb{T}^d = [0, L]^d$ with standard zero mean condition;
2) in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$;
3) on the sphere or in a domain on it $\Omega \subseteq \mathbb{S}^2$;
4) if $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ or $\Omega \subsetneq \mathbb{S}^2$, then $\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$ and $\bar{u}$ is recovered from u by solving the Stokes problem if there is a boundary, or the Helmholtz equation, otherwise.

Here $\alpha = \alpha' L^2$, and $\alpha' > 0$ is a small dimensionless parameter, so that $\bar{u}$ is a smoothed (filtered) vector field, and $\gamma > 0$ rendering the system dissipative.

The phase space with respect to $\bar{u}$ is the Sobolev space $\mathbf{H}^1$ with divergence free condition

$$\bar{u} \in \mathbf{H}^1 := \begin{cases} \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{T}^d), & x \in \mathbb{T}^d,\ \int_{\mathbb{T}^d} \bar{u}(x)dx = 0, \\ \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{H}^1_0(\Omega), & x \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^d, \mathbb{S}^2 \end{cases} \qquad \operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

where $d = 2, 3$.

Theorem 1. *Let $d = 2$. In each case of the boundary conditions the system possesses a global attractor $\mathcal{A} \Subset \mathbf{H}^1$ with finite fractal dimension satisfying*

$$\dim_F \mathcal{A} \le \frac{1}{8\pi} \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha\gamma^4} \min\left(\|\operatorname{rot} g\|^2_{L^2},\ \dfrac{\|g\|^2_{L^2}}{2\alpha} \right), & x \in \mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2 \\ \dfrac{\|g\|^2_{L^2}}{2\alpha^2\gamma^4}, & x \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2. \end{cases}$$

In the 3D case the estimates in all tree cases look formally the same

$$\dim_F \mathcal{A} \le \frac{1}{12\pi} \frac{\|g\|^2_{L^2}}{\alpha^{5/2}\gamma^4}, \quad x \in \mathbb{T}^3,\ x \in \mathbb{R}^3,\ x \in \Omega \subsetneq \mathbb{R}^3 .$$

Finally, on the torus $\mathbb{T}^d$, both for $d = 2$ and $d = 3$, the upper bounds are optimal in the limit as $\alpha \to 0^+$.

This is a joint work with S.V. Zelik and A.G. Kostianko and was supported by Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Agreement with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. 075-15-2019-1623.

References

[1] A.A. Ilyin and S.V. Zelik,. Sharp dimension estimates of the attractor of the damped 2D Euler-Bardina equations. *Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics*, EMS Press, Berlin, 2021, 209–229.

[2] S.V. Zelik., A.A. Ilyin, and A.G. Kostianko Dimension estimates for the attractor of the regularized damped Euler equations on the sphere. *Mat. zametki*, **111**:1 (2022), 55–67.

[3] S.V.Zelik, A.A.Ilyin, A.G.Kostianko. Sharp dimension estimates for the attractors of the regularized damped Euler system. *Doklady Mathematics* **104**:1 (2021), 169–172.

[4] A.A. Ilyin, A.G. Kostianko, and S.V. Zelik. Sharp upper and lower bounds of the attractor dimension for 3D damped Euler–Bardina equations. *Physica D*, accepted for publication.

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia. Email: ilyin@keldysh.ru

ON THE SOLVABILITY OF A PARAMETER-DEPENDENT CANTILEVER-TYPE BVP

INFANTE G.

We utilize a Birkhoff-Kellogg-type theorem [1] to discuss the solvability of a parameter-dependent fourth order equation subject to functional boundary conditions. We prove the existence of non-negative solutions for this problem. A localization of the solutions is obtained via their norm.

References

[1] M. A. Krasnosel'skiĭ and L. A. Ladyženskiĭ, The structure of the spectrum of positive nonhomogeneous operators, *Trudy Moskov. Mat. Obšč*, **3** (1954), 321–346.

Università della Calabria, Italy. Email: gennaro.infante@unical.it

SINGULARITIES OF PARALLELS TO TANGENT DEVELOPABLE SURFACES

ISHIKAWA G.

A surface in Euclidean 3-space is called *developable* if it is locally isometric to the plane. Developable surfaces are roughly classified into cylinders, cones and tangent developables. A tangent developable surface is defined as a ruled surface by tangent lines to a space curve and it has singularities at least along the space curve, called the *directrix* or the *edge of regression* ([1]). The class of developable surfaces (resp. tangent developable surfaces) turns to be invariant under the parallel deformations by the flow generated by the unit normal vector field along the surfaces.

The notions of tangent developable surfaces and their parallels are naturally generalised for *frontal* curves in general in Euclidean spaces of arbitrary dimensions.

A smooth map-germ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^{n+p}$ is called a *frontal* if there exists a smooth n-plane field $(\mathbb{R}^n, 0) \ni u \mapsto \widetilde{f}(u) \subset T_{f(u)}\mathbb{R}^{n+p}$ along f such that

$f_*(T_u\mathbb{R}^n) \subseteq \widetilde{f}(u)$, i.e., if the "tangent spaces"along f is well-defined even on singular (non-immersive) points of f ([2]). Then the pull-back Euclidean bundle $f^*(T\mathbb{R}^{n+p})$ is decomposed into the sum $T_f \oplus N_f$ of the *tangent bundle* T_f (of rank n) and the *normal bundle* N_f (of rank p) of f over $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Let $\tau_1, \dots, \tau_n$ be a local frame of T_f. Then the *tangent map* $\mathrm{Tan}(f) : (\mathbb{R}^n, 0) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ to f is defined by

$$\mathrm{Tan}(f)(u_1, \dots, u_n, s_1, \dots, s_n) = f(u) + \textstyle\sum_{i=1}^n s_i \tau_i(u).$$

See [3]. Moreover if the normal bundle N_f of a frontal f is a flat bundle, then the *family of parallels* $\mathrm{P}(f) : (\mathbb{R}^n, 0) \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n+p}$ to f is defined by

$$\mathrm{P}(f)(u_1, \dots, u_n, r_1, \dots, r_p) = f(u) + \textstyle\sum_{j=1}^p r_j \nu_j(u),$$

for an orthonormal and normally flat frame $\nu_1, \dots, \nu_p$ of N_f ([4][5]).

If $n = 1$, we see that the tangent map or the tangent developable surface $\mathrm{Tan}(f) : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}^{1+p}$ of a frontal curve $f : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^{1+p}$ has the flat normal bundle under some weak conditions and then we can discuss its parallels $\mathrm{P}_r(\mathrm{Tan}(f)), (r \in \mathbb{R}^{p-1})$ to the tangent developable surface $\mathrm{Tan}(f)$ of f ([5]).

In this talk the singularities appearing on parallels to tangent developable surfaces of frontal curves and the expressions of their directrixes are studied from both geometrical and dynamical aspects of frontals. Moreover the classification results of generic singularities on parallels to tangent developable surfaces for frontal curves in 3 or 4 dimensional Euclidean spaces are presented (see [6]). The related topics such as the generic bifurcations of wave fronts by Arnold, Zakalyukin, and so on will be mentioned, regarding the general classification problem of frontal singularities ([7][8][9]).

The author was supported by JSPS and RFBR under the Japan-Russia Research Cooperative Program 120194801 and JSPS KAKENHI Grant Number JP19K03458, JP19H00636.

References

[1] Ishikawa G., *Singularities of developable surfaces,* in "Singularity Theory London Math. Soc. Lecture Notes Series, **263**, pp. 403–418, (1999).

[2] Ishikawa G., *Singularities of frontals*, in "Singularities in Generic Geometry Adv Studies in Pure Math., **78**, Math. Soc. Japan, pp.55-106, (2018).

[3] Ishikawa G., *Singularities of tangent varieties to curves and surfaces,* Journal of Singularities, **6** (2012), 54–83.

[4] Izumiya S., Fuster M. C. R., Ruas M. A. S., Tari F., *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint,* World Scientific Publishing Co. (2015).

[5] Ishikawa G., *Normal and tangent maps to frontals,* Journal of Mathematical Sciences, **255-5** (2021), 664–677. arXiv:2009.06515 [math.DG] v3.

[6] Ishikawa G., *Singularities of parallels to tangent developable surfaces,* to appear in Tohoku Mathematical Journal, arXiv:2105.07361 [math.DG] v3.
[7] Arnol'd V.I., Gusein-Zade S. M., Varchenko A. N., *Singularities of Differentiable Maps I,* Birkhäuser (1986),
[8] Arnol'd V. I., *Singularities of Caustics and Wave Fronts,* Mathematics and its Applications, **62**, Kluwer Academic Publishers (1990).
[9] Ishikawa G., *Recognition problem of frontal singularities,* Journal of Singularities, **21** (2020), 149–166.

Department of Mathematics, Hokkaido University, Japan.
Email: ishikawa@math.sci.hokudai.ac.jp

ON DIFFUSE ORTHOGONALLY ADDITIVE OPERATORS

ITAROVA S. Y.

Orthogonally additive operators in vector lattices have been studied by some authors in [2, 3, 4, 5]. It was shown in [5] that the vector space $\mathcal{OA}_r(E, F)$ of all regular orthogonally additive operators from a vector lattice E to a Dedekind complete vector lattice F is a Dedekind complete vector lattice. This result motivate to state natural questions about the order structure of $\mathcal{OA}_r(E, F)$. In these notes we consider diffuse orthogonally additive operators and state the criterion of the diffuseness of a regular orthogonally additive operator.

For the standard information on vector lattices and orthogonally additive operators we refer the reader to [1, 4].

Definition 1. A map T from a vector lattice E to a vector lattice F is said to be an *orthogonally additive operator* if $T(x + y) = Tx + Ty$, for every disjoint $x, y \in E$.

Definition 2. An orthogonally additive operator $T\colon E \to F$ is said to be *disjointness preserving* if $Tx \perp Ty$ for all disjoint $x, y \in E$. The set of all disjointness preserving orthogonally additive operator from E to F we denote by $\mathcal{OA}_{dpo}(E, F)$. We say that a regular orthogonally additive operator $T\colon E \to F$ is *diffuse* if $T \in \{\mathcal{OA}_{dpo}(E, F)\}^d$.

Definition 3. Let E, F be vector lattice with F Dedekind complete and $T \in \mathcal{OA}_r(E, F)$. We define a function $\mathfrak{p}_T\colon E \to F^+$, called the *Enflo-Starbird function* of T, by setting

$$\mathfrak{p}_T(x) = \inf\left\{\bigvee_{i=1}^{m} |T|x_i :\ x = \bigsqcup_{i=1}^{m} x_i,\ x_i \in E,\ m \in \mathbb{N}\right\},\ x \in E.$$

The next theorem is the criterion of the diffuseness if a regular orthogonally additive operator.

Theorem 1. *Let E, F be vector lattices with F Dedekind complete and $T \in \mathcal{OA}_r(E,F)$. Then the following assertions are equivalent:*

(1) *T is diffuse;*
(2) *$\mathfrak{p}_T(x) = 0$ for all $x \in E$.*

References

[1] Aliprantis C. D., Burkinshaw O., *Positive Operators*, Springer, Dordrecht, (2006).
[2] W. A. Feldman, *A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl., **472** (2019), 1, 238–245.
[3] O. Fotiy, A. Gumenchuk, I. Krasikova, M. Popov, *On sums of narrow and compact operators*, Positivity, **24** (2020), 1, 69–80.
[4] V. Mykhaylyuk, M. Pliev, M. Popov, *The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators*, Positivity, **25** (2021), 2, 291-327.
[5] Pliev M., Ramdane K., *Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices*, Mediter. J. Math. **15** (2018), 2, Article number 55.

North Ossetian State University, Russia.
Email: svetlana.itarova1991@gmail.com

THE SOMMERFELD PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

KALMENOV T. SH.[1], LES A. K.[2]

The study of a time-periodic solution of the multidimensional wave equation $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{u} - \Delta_x \widetilde{u} = \widetilde{f}(x,t)$, $\widetilde{u}(x,t) = e^{ikt}u(x)$, over the whole space $\mathbb{R}^3$ leads to the condition of the Sommerfeld radiation at infinity. This is a problem that describes the motion of scattering stationary waves from a source that is in a bounded area.

The inverse problem of finding this source is equivalent to reducing the Sommerfeld problem to a boundary value problem for the Helmholtz equation in a finite domain. Therefore, the Sommerfeld problem is a special inverse problem. It should be noted that in the work of Bezmenov [I. V. Bezmenov, Transfer of Sommerfeld radiation conditions to an artificial boundary of the region based on the variational principle, Sb. Math. 185 (1995), no. 3, 3-24] approximate forms of such boundary conditions were found. In [T. S. Kalmenov and D. Suragan, Transfer of Sommerfeld radiation conditions to the boundary of a limited area, J. Comput. Math. Math. Phys. 52 (2012), no. 6, 1063-1068], for a complex parameter λ, an explicit form of these boundary conditions was found through the boundary condition of the Helmholtz potential given by the integral in the finite domain Ω:

$$u(x,\lambda) = \int_\Omega \varepsilon(x-\xi,\lambda)\rho(\xi,\lambda)d\xi. \tag{1}$$

where $\varepsilon(x-\xi,\lambda)$ are fundamental solutions of the Helmholtz equation,

$$-\Delta\varepsilon(x) - \lambda\varepsilon(x) = \delta(x),$$

$\rho(\xi,\lambda)$ is a density of the potential, λ is a complex number, and δ is the Dirac delta function. These boundary conditions have the property that stationary waves coming from the region Ω to $\partial\Omega$ pass $\partial\Omega$ without reflection, i.e. are transparent boundary conditions. In the present work, in the general case, in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, we have proved the problem of reducing the Sommerfeld problem to a boundary value problem in a finite domain. Under the necessary conditions for the Helmholtz potential (1), its density $\rho(\xi,\lambda)$ has also been found.

The research was supported by by the grant of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, project no. AP08856042.

[1]Institute of mathematics and mathematical modeling, Kazakhstan.
Email: kalmenov.t@mail.ru
[2]Institute of mathematics and mathematical modeling, Kazakhstan.
Email: a.les@math.kz

ON ASYMPTOTIC AND NUMERICAL SOLUTION TO ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATION

KAPUSTINA T.O.

This research is devoted to singularly perturbed elliptic–parabolic equation with small parameters by the elder derivatives. Coefficients of equation and boundary conditions obey the requirements providing existence of unique solution [1]. First, asymptotic representation for our solution with respect to the small parameter is constructed. We use boundary functions method [2], and its modification for mixed type equations [3], [4].

Then, an efficient numerical algorithm for our problem is created. The main idea is that numerical calculation of parabolic equation is much easier and requires less operations then the elliptic one. Using once more the smallness of parameter, we construct approximate factorization of elliptic operator, replacing it by the product of two parabolic operators [5]. Instead of one elliptic problem, we calculate numerically two successive parabolic problems, providing their well–posedness by the choice of time direction. To begin algorithm, we need to know initial condition for the first parabolic equation. As it cannot be calculated explicitly, we replace it by its asymptotic representation calculated in the first part.

Combination of asymptotic representation and factorization idea, both suitable for equations with small parameters, allow us to create an effective numerical algorithm. The main advantage of this algorithm is significant gain in speed and economy of computer resources, compared to classical numerical scheme.

Thus we unite asymptotic and numerical approaches for singularly perturbed elliptic–parabolic equation.

This research is supported by Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, project 075–15–2019–1621.

References

[1] Dzhuraev T. D., *Boundary value problems for mixed type equations,* Tashkent, Fan, 1979.

[2] Vasilieva A. B., Butuzov V. F., *Asymptotic methods in singular perturbation theory,* Moscow, Vysshaya Shkola, 1990.

[3] Sushko V. G., *Asymptotic representations for solutions of bisingular problems,* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 18, 1999, 51–151.

[4] Rozov N. Kh., Kapustina T. O., *One boundary problem for elliptic–parabolic equation,* Differential Equations, 6, 2001, 847–848.

[5] Loheac J.–P., Nataf F., Schatzman M., *Parabolic approximations of the convection–diffusion equation,* Mathematics of Computations, 60, 1993, 515–530.

Moscow State University, Russia. Email: tatiana.kapustina@math.msu.ru

POSITIVE PERIODIC SOLUTION FOR A NEUTRAL DELAY HEMATOPOIESIS MODEL

KHEMIS M.[1], BOUAKKAZ A.[2], KHEMIS R.[3]

The present work is concerned with the existence and uniqueness of positive periodic solutions for the following first-order neutral delay production blood cells model:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - cx\left(t-\tau\left(t\right)\right)\right] = -\,a\left(t\right)x\left(t\right) + \frac{p\left(t\right)x^{[2]}\left(t\right)}{1+x^{[2]}\left(t\right)} - H\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right), \tag{1}$$

where $c \in [0, 1[$, $a, p, \tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ and $H \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+^*)$ are $T-$periodic functions, $x\left(t\right)$ represents the density of mature cells in blood circulation at time t, $x^{[2]}\left(t\right) = x\left(x\left(t\right)\right)$, $a\left(t\right)$ is the destruction rate of blood cells, $p\left(t\right)$ is the the production rate and $\tau\left(t\right)$ represents a transit time required for the release of mature cells into the bloodstream. The method used here lies in Banach and Krasnoselskii's fixed point theorems.

Let P_T be the Banach space of all continuous and T-periodic functions equipped with the supremum norm and for $\alpha, \beta, \Gamma > 0$, let

$$\mathbb{D} = \{x \in P_T,\ \alpha \leq x(t) \leq \beta,\ |x(t_2) - x(t_1)| \leq \Gamma |t_2 - t_1|,\ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

is a bounded convex and closed subset of P_T.

For ease of exposition, we introduce the following notations:

$$a_1 = \sup_{\sigma \in [0.T]} a(t), \qquad p_0 = \inf_{\sigma \in [0.T]} p(t),$$

$$L_1 = \frac{\exp\left(-\int_0^T a(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right) - 1},$$

$$L_2 = \frac{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right) - 1},$$

$$p_1 = \sup_{\sigma \in [0.T]} p(t), \qquad H_1 = \sup_{\sigma \in [0.T]} H(\sigma, 0, 0),$$

$$L_3 = H_1 + \beta(\lambda_1 + \lambda_2 + ca_1),$$

$$L_4 = (\Gamma + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + p_1) + ca_1.$$

Furthermore, we need the following hypotheses:
There exist two non negative constants λ_1 and λ_2 such that

$$|H(t, x_1, x_2) - H(t, y_1, y_2)| \leq \lambda_1 |x_1 - y_1| + \lambda_2 |x_2 - y_2|, \tag{2}$$

$$TL_2 p_1 + c \leq 1, \tag{3}$$

$$L_1 T p_0 \frac{\alpha}{1+\beta} - L_2 T L_3 + c\alpha \geq \alpha, \tag{4}$$

and

$$L_2(2 + Ta_1)(\beta p_1 + L_3) + c\Gamma(\Gamma + 1) \leq \Gamma \tag{5}$$

First of all, we convert equation (1) into an integral one. Next, we define two operators $R_1, R_2 : \mathbb{D} \to P_T$ as follows:

$$(R_1 x)(t) = \int_t^{t+T} G(t, \sigma) \left[p(\sigma) \frac{x^{[2]}(\sigma)}{1 + x^{[2]}(\sigma)} - H\left(\sigma, x(\sigma), x^{[2]}(\sigma)\right) \right.$$
$$\left. - ca(\sigma)\, x(\sigma - \tau(\sigma)) \right] d\sigma,$$

and

$$(R_2 x)(t) = cx(t - \tau(t)),$$

where

$$G(t,s)=\frac{\exp\left(\int_t^s a(u)\,du\right)}{\exp\left(\int_t^T a(u)\,du\right)-1}.$$

Theorem 1. *If hypotheses* (2) - (5) *are satisfied, then equation* (1) *has at least one positive periodic solution in* $\mathbb{D}$.

Theorem 2. *Suppose the condition* (2) *holds. If*

$$L_2L_4T+c<1,$$

then equation (1) *has one and only one positive periodic solution in* $\mathbb{D}$.

References

[1] Bouakkaz A., Khemis R., *Positive periodic solutions for a class of second-order differential equations with state-dependent delays*, Turk J Math 44, 1412-1426, 2020.

[2] Bouakkaz A., Khemis R., *Positive periodic solutions for revisited Nicholson's blowflies equation with iterative harvesting term*, J. Math. Anal. Appl 494, 124663, 2021.

[3] Luo Y., Wang W., Shen J., *Existence of positive periodic solutions for two kinds of neutral functional differential equations*, Appl. Math. Lett 21, 581-587, 2008.

[1]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955, Skikda, Algeria.
Email: khemismarwa08@gmail.com

[2]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955, Skikda, Algeria.
Email: ahlemkholode@yahoo.com

[3]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955, Skikda, Algeria.
Email: kbra28@yahoo.fr

ON NEUMANN TYPE PROBLEMS FOR HIGHER ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

KIGURADZE I.T.

On a finite interval $[a,b]$, we consider the differential equation

$$u^{(2m)}=p(t)u+q(t) \tag{1}$$

with the Neumann type boundary conditions

$$\begin{aligned} u^{(k)}(a)=c_{1k}\ \ (k=1,\dots,m-1),\quad u^{(2m-1)}(a)=c_{1m},\\ u^{(k)}(a)=c_{2k}\ \ (k=1,\dots,m-1),\quad u^{(2m-1)}(b)=c_{2m}. \end{aligned} \tag{2}$$

Here $m\geq 2$, $p,q:[a,b]\to\mathbb{R}$ are Lebesgue integrable functions, while c_{ik} $(i=1,2;k=1,\dots,m)$ are real constants.

We call (2) Neumann type conditions since they do not contain the values of a solution sought at the points a and b. Thus, in the case where $p(t) \equiv 0$, problem (1), (2) either has no solution or has an infinite set of solutions. In the case, where

$$\text{mes}\,\{t \in [a,b]:\ p(t) \neq 0\} > 0, \tag{3}$$

we found integral conditions guaranteeing the unique solvability of problem (1), (2).

Put

$$\mathcal{P}_- = \int_a^b [(-1)^m p(t)]_-\, dt,$$

$$\mathcal{P}_+ = \int_a^b [(-1)^m p(t)]_+\, dt,$$

$$\ell_m = \frac{2^{2-2m}(b-a)^{2m-1}}{(2m-3)((m-2)!)^2}.$$

The following theorem is valid.

Theorem. *Let along with* (3) *the inequality*

$$\mathcal{P}_+ \leq \mathcal{P}_-/(1 + \ell_m \mathcal{P}_-)$$

hold, or

$$(-1)^m p(t) \geq 0 \quad \textit{for} \quad a < t < b, \quad \int_a^b |p(t)|dt \leq 1/\ell_m.$$

Then problem (1), (2) *has a unique solution.*

Analogous results are obtained for nonlinear differential equations.

A. Razmadze Mathematical Institute of Tbilisi State University, Georgia.
Email: ivane.kiguradze@tsu.ge

ON ORBITAL STABILITY OF GROUND STATES FOR FINITE CRYSTALS IN FERMIONIC SCHRÖDINGER–POISSON MODEL

KOMECH A.I.

We consider crystals which occupy the finite torus $\mathbb{T} := \mathbb{R}^3/N\mathbb{Z}^3$ and have one ion per cell of the cubic lattice $\Gamma := \mathbb{Z}^3/N\mathbb{Z}^3$, where $N \in \mathbb{N}$. We denote by $\sigma(x)$ the charge density of one ion,

$$\sigma \in C^2(\mathbb{T}), \qquad \int_{\mathbb{T}} \sigma(x)dx = eZ > 0, \tag{1}$$

where $e > 0$ is the elementary charge. Let us denote

$$\overline{\mathbb{T}} := \mathbb{T}^{\overline{N}} := \{\overline{x} = (x_1, ..., x_{\overline{N}}) : x_j \in \mathbb{T}, \quad j = 1, ..., \overline{N}\}, \qquad \overline{N} := N^3.$$

Let $\psi(\cdot,t)\in F$ for $t\in\mathbb{R}$ be the antisymmetric wave function of the fermionic electron field, $q(n,t)$ denotes the ion displacement from the reference position $n\in\Gamma$. Denote the second quantized operators

$$\Delta^{\otimes}:=\sum_{j=1}^{\overline{N}}\Delta_{x_j},\qquad \Phi^{\otimes}(\overline{x},t):=\sum_{j=1}^{\overline{N}}\Phi(x_j,t).$$

The coupled Schrödinger-Poisson-Newton equations read as follows

$$i\dot{\psi}(\overline{x},t) \;=\; -\frac{1}{2}\Delta^{\otimes}\psi(\overline{x},t)-e\Phi^{\otimes}(\overline{x},t)\psi(\overline{x},t),\qquad \overline{x}\in\overline{\mathbb{T}}, \tag{2}$$

$$-\Delta\Phi(x,t) \;=\; \rho(x,t):=\sum_{n\in\Gamma}\sigma(x-n-q(n,t))+\rho^e(x,t),\qquad x\in\mathbb{T}, \tag{3}$$

$$M\ddot{q}(n,t) \;=\; -(\nabla\Phi(x,t),\sigma(x-n-q(n,t))),\qquad n\in\Gamma, \tag{4}$$

where

$$\rho^e(x,t):=-e\int_{\overline{\mathbb{T}}}\sum_{j=1}^{\overline{N}}\delta(x-x_j)|\psi(\overline{x},t)|^2\,d\overline{x},\quad x\in\mathbb{T}. \tag{5}$$

We show that under the Jellium condition all ground states with Γ-periodic arrangement of ions have the form

$$S(t):=(\psi_0e^{-i\omega_0t},\overline{r},0),\qquad r\in\mathbb{T}. \tag{6}$$

Here

$$\overline{r}\in\overline{\mathbb{T}}:\quad \overline{r}(n)=r,\ n\in\Gamma, \tag{7}$$

while ψ_0 is an eigenfunction

$$-\frac{1}{2}\Delta^{\otimes}\,\psi_0(\overline{x})=\omega_0\psi_0(\overline{x}),\qquad \overline{x}\in\overline{\mathbb{T}}, \tag{8}$$

corresponding to the minimal eigenvalue $\omega_0:=\min\,\mathrm{Spec}(-\frac{1}{2}\Delta^{\otimes})$. We establish the stability of the real 4-dimensional solitary manifold

$$S=\{S_{\alpha,r}=(\psi_\alpha,\overline{r},0):\ \psi_\alpha(\overline{x})\equiv e^{i\alpha}\psi_0(\overline{x}),\ \ \alpha\in[0,2\pi];\ \ r\in\mathbb{T}\}. \tag{9}$$

We denote the Hilbert manifolds

$$V:=H^1(\overline{\mathbb{T}})\otimes\overline{\mathbb{T}}\otimes\mathbb{R}^{3\overline{N}}. \tag{10}$$

Theorem 1. *Let the Jellium and Wiener conditions hold (see* [1, 2]*). Then for any $\varepsilon>0$ there exists $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ such that for $d_V(X(0),S)<\delta$ we have*

$$md_V(X(t),S)<\varepsilon,\qquad t\in\mathbb{R}, \tag{11}$$

where $X\in C(\mathbb{R},V)$ is the corresponding solution to (2)–(4)*.*

Remark 1. The Pauli exclusion principle, i.e., the antisymmetry of the wave functions $\psi(\overline{x},t)$, plays the crucial role in the proof of the orbital stability.

References

[1] A. Komech, E. Kopylova, On orbital stability of ground states for finite crystals in fermionic Schrödinger–Poisson model, SIAM J. Math. Analysis 50 (2018), no. 1, 64–85. Open access.

[2] A. Komech, On stability of solid state in the Schrödinger-Poisson-Newton model, 2021. arXiv:2101.05315 [math-ph].

IITP RAS and Moscow State University, Russia.
Email: alexander.komech@gmail.com

ON LARGE TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF HIGHER ORDER EVOLUTION INEQUALITIES

KON'KOV A.A.[1], SHISHKOV A.E.[2]

We consider inequalities of the form

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^{\alpha} a_{\alpha}(x,t,u) - u_t \geq f(x,t)g(u) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

where Ω is a non-empty open subset of $\mathbb{R}^n$, $m, n \geq 1$, and a_α are Caratheodory functions such that

$$|a_\alpha(x,t,\zeta)| \leq A\zeta^p, \quad |\alpha| = m,$$

with some constants $A > 0$ and $p > 0$ for almost all $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$ and for all $\zeta \in [0,\infty)$.

For solutions of (1) we obtain exact sufficient conditions to stabilize to zero in L_1-norm on any compact subset of Ω as $t \to \infty$. These conditions are different in the cases of so-called slow diffusion $p \geq 1$ and of fast diffusion $0 < p < 1$. Detailed proofs of all results are given in [1, 2].

This research is supported by RUDN University, Strategic Academic Leadership Program. The research of the first author is also supported by RSF, grant 20-11-20272.

References

[1] Kon'kov A.A., Shishkov A.E., *On stabilization of solutions of higher order evolution inequalities*, Asymptot. Anal. 115 (2019), 1–17.

[2] Kon'kov A.A., Shishkov A.E., *On large time behavior of solutions of higher order evolution inequalities with fast diffusion*, J. Math. Anal. Appl. 506 (2022) 125722.

[1]Moscow Lomonosov State University, Russia.
Email: konkov@mech.math.msu.su
[2]RUDN University, Russia. Email: aeshkv@yahoo.com

STABILITY OF SOLITARY WAVES OF KLEIN-GORDON EQUATION WITH MEAN FIELD INTERACTION

KOPYLOVA E.A.

We consider $\mathbf{U}(1)$-invariant nonlinear Klein–Gordon equation on a line with mean field self-interaction:

$$\ddot{\psi}(x,t) = \partial_x^2\psi(x,t) - m^2\psi(x,t) + \rho(x)F(\langle\psi(\cdot,t),\rho\rangle), \quad \psi(x,t)\in\mathbb{C}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

We write the equation as the dynamical system:

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 - m^2 & 0 \end{bmatrix}\Psi(t) + \rho(x)\begin{bmatrix} 0 \\ F(\langle\psi(\cdot,t),\rho\rangle)\end{bmatrix}, \ \Psi(x,t) = \begin{bmatrix}\psi(x,t)\\ \pi(x,t)\end{bmatrix}. \qquad (1)$$

The system admits finite energy solutions of the form

$$\Psi_\omega(x,t) = e^{-i\omega t}\phi_\omega(x) = e^{-i\omega t}\begin{bmatrix}\varphi(x,\omega) \\ -i\omega\varphi(x,\omega)\end{bmatrix}, \quad \omega\in(-m,m),$$

called *solitary waves*. The solitary waves form a two-dimensional *solitary manifold* in the Hilbert space of finite energy states of the system.

We show that for the system (1) the standard criterion for orbital stability ([1] and references therein) holds:

$$\partial_\omega\mathcal{Q}(\phi_\omega) = \partial_\omega(\omega\|\varphi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R})}) < 0, \qquad (2)$$

where the charge $\mathcal{Q}(\Psi) = \operatorname{Im}\int\psi(x)\overline{\pi}(x)\,dx$ is conserved.

In the case when ρ is close to δ-function, we express the criterion in terms of nonlinearity condition. In particular, in pure power case $F(z) = z^{2\kappa+1}$, the criterion holds for any $\kappa < 0$ and $\omega\in(-m,m)$; if $\kappa > 0$, it holds only for $m\sqrt{\kappa} < |\omega| < m$.

Our second result is asymptotic stability of solitary waves. Namely, we prove scattering asymptotics of type

$$\Psi(t) \sim \Psi_{\omega_\pm}(t) + W(t)\Xi_\pm, \qquad t\to\pm\infty, \qquad (3)$$

where $W(t)$ is the dynamical group of the free Klein–Gordon equation, $\Xi_\pm\in E := H^1(\mathbb{R})\oplus L^2(\mathbb{R})$ are the corresponding asymptotic scattering states, and the remainder decays to zero as $\mathcal{O}(|t|^{-1/2})$ in global norm of E. The asymptotics holds for the solutions with initial states close to the *stable part* of the solitary manifold, extending the results of [2, 3].

The proof is essentially based on properties of linearized dynamics at a solitary wave $e^{-i\omega t}\phi_\omega$. The model (1) allows us to explicitly check the most of them. Namely, we prove weighted energy decay for the solution of the linearized equation and the limiting absorption principle for the corresponding resolvent. For linearization operator we prove the absence of virtual levels at the embedding threshold $\pm i(m+|\omega|)$ and give the criterion for the absence of virtual levels at the endpoints $\pm i(m-|\omega|)$ of the essential spectrum.

We show also that under condition (2), the linearized operator has no real nonzero eigenvalues, and zero eigenvalue is of multiplicity 2 in the case when $\partial_\omega \mathcal{Q}(\phi_\omega) \neq 0$.

The only assumption we postulate is the absence of pure imaginary eigenvalues of the linearized operator. For ρ close to δ-function, we provide examples of nonlinearities when this assumption is satisfied. In particular, in pure power case $F(z) = z^{2\kappa+1}$, the condition holds for any $\kappa \leq -1/2$ and $\omega \in (-m, m)$; if $\kappa > -1/2$, $\kappa \neq 0$, it holds only for $m\frac{(1+2\kappa)^2}{3+4\kappa} < |\omega| < m$.

References

[1] Grillakis M., Shatah J., and Strauss W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987).

[2] Buslaev V., Komech A., Kopylova E., and Stuart D., *On asymptotic stability of solitary waves in Schrödinger equation coupled to nonlinear oscillator*, Comm. Part. Differ. Equat. **33** (2008).

[3] Buslaev V., and Sulem C., *On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003).

Institute for Information Transmission Problems, Moscow, Russia and Faculty of Mathematics of Vienna University, Vienna, Austria. Email: ek@iitp.ru

ON THE ASYMPTOTIC CLASSIFICATION OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER EQUATIONS WITH POWER-LAW NONLINEARITY OF GENERAL FORM

KORCHEMKINA T.A.

Consider the second-order nonlinear differential equation

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\, |y|^{k_0}\, |y'|^{k_1} \operatorname{sgn}(yy'), \quad k_0 > 0,\ k_1 > 0,\ k_0, k_1 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

with positive continuous in x and Lipschitz continuous in u, v function $p(x, u, v)$ satisfying inequalities

$$0 < m \leq p(x, u, v) \leq M < +\infty. \tag{2}$$

The results on the behavior of solutions depending on the nonlinearity exponents k_0, k_1 and qualitative properties of solutions were studied in [1].

The asymptoptic behavior of solutions to (1) in the case $k_1 = 0$ is described in [2, 3]. In the case $p = p(x)$ asymptotic behavior of solutions to (1) is obtained by V.M. Evtukhov [4]. Using methods described in [5, 6, 7] by I.V. Astashova, the behavior of solutions to (1) near domain boundaries is considered with respect to the values k_0 and k_1.

The following definitions are used further:

Definition 1. [7] A solution $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ to an ordinary differential equation is called a *μ-solution,* if

1) the equation has no other solutions equal to y on some subinterval $(a,\, b)$ and not equal to y at some point in $(a,\, b)$;

2) the equation either has no solution equal to y on $(a,\, b)$ and defined on another interval containing $(a,\, b)$ or has at least two such solutions which differ from each other at points arbitrary close to the boundary of $(a,\, b)$.

Definition 2. [8] A solution satisfying at some finite point x^* the conditions $\lim\limits_{x\to x^*} |y'(x)| = \infty$, $\lim\limits_{x\to x^*} |y(x)| < \infty$ is called a *black hole* solution.

Definition 3. [9] A μ-solution satisfying at finite point (its domain boundary) $\tilde{x}$ the conditions $\lim\limits_{x\to\tilde{x}} y'(x) = 0$ and $\lim\limits_{x\to\tilde{x}} y(x) \ne 0$ is called a *white hole* solution.

Definition 4. A solution to equation (1) is called a *Kneser solution at decreasing argument* on the interval $(-\infty;\, x_0)$ if $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ for any $x < x_0$.

Definition 5. A solution to equation (1) is called a *negative Kneser solution* on the interval $(x_0;\, +\infty)$ if $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ for any $x > x_0$.

Definition 6. [10] A μ-solution $y(x)$ to equation (1) is called a *singular of the type II at a point* $a \in \mathbb{R}$ iff $\lim\limits_{x\to a} y(x) = \lim\limits_{x\to a} y'(x) = 0$.

Lemma 1. *Let the function $p(x,u,v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u, v and satisfying the inequalities* (2). *Then all μ-solutions to equation (1) are monotonous.*

Denote

$$\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1}, \quad C = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}|\alpha+1|}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}}.$$

For $s > 0$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ denote $\widetilde{D}(s,t) = \left(|1-k_1|\, s\, |t|^{k_0}\right)^{\frac{1}{1-k_1}}$.

Theorem 1. *Suppose $k_0 + k_1 < 1$. Let the function $p(x,u,v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u, v and satisfying inequalities* (2). *Let there also exist the following limits of $p(x,u,v)$:*

1) p_+ as $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$,

2) p_- as $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$.

Denote $p_a = p(a,0,0)$ for any $a \in \mathbb{R}$. Then $\alpha < -1$ and all increasing μ-solutions to equation (1) according to their asymptotic behavior can be divided into three types:

1. Increasing solutions defined on the whole axis with zero at some point x_0:

$$y(x) = C(p_-)\,(x_0-x)^{-\alpha}(1+o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y(x) = C(p_+)\,(x - x_0)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

2. Positive singular solutions defined on semi-axis $(a, +\infty)$:

$$y(x) = C(p_a)\,(x - a)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to a + 0.$$

$$y(x) = C(p_+)\,(x - a)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

3. Negative singular solutions defined on semi-axis $(-\infty, b)$:

$$y(x) = C(p_-)\,(b - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y(x) = C(p_b)\,(b - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to b - 0.$$

Theorem 2. *Suppose $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$. Let the function $p(x, u, v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u, v and satisfying inequalities* (2)*. Let there also exist the following limits of $p(x, u, v)$:*

1) P^a as $x \to a - 0$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$, for every $a \in \mathbb{R}$;

2) P_a as $x \to a + 0$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$, for every $a \in \mathbb{R}$;

3) P_+ as $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$;

4) P_- as $x \to -\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$.

Then $\alpha > 0$ and all maximally extended increasing solutions to (1) according to their asymptotic behavior can be divided into three types:

1. Increasing solutions with two vertical asymptotes $x = x_*$ and $x = x^*$, $x_* < x^*$:

$$y = C(P^{x^*})\,(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to x^* - 0,$$
$$y = -C(P_{x_*})\,(x - x_*)^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to x_* + 0.$$

2. Kneser solution at decreasing argument defined on the semi-axis $(-\infty, x^*)$:

$$y = C(P_-)\,|x|^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to -\infty,$$
$$y = C(P^{x^*})\,(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to x^* - 0.$$

3. Negative Kneser solutions defined on the semi-axis $(x_*, +\infty)$:

$$y = -C(P_{x_*})\,(x - x_*)^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to x_* + 0,$$
$$y = -C(P_+)\,x^{-\alpha}(1 + o(1)),\ x \to +\infty.$$

Theorem 3. *Suppose $k_1 > 2$. Let the function $p(x, u, v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u, v and satisfying inequalities* (2)*. Let there also for any $a, b > 0$ exist a limit P_{ab} as $x \to a$, $u \to b$, $v \to +\infty$ and for any $a, b < 0$ a limit P_{ab} as $x \to a$, $u \to b$, $v \to +\infty$. Then any increasing μ-solution $y(x)$ to equation (1) is defined on a finite interval (x_-, x_+) and has finite limits $y_+ = \lim\limits_{x \to x_+ - 0} y(x)$ and $y_- = \lim\limits_{x \to x_- + 0}$. Moreover,*

$$y'(x) = \widetilde{D}(P_{x_+ y_+}, y_+)\,(x_+ - x)^{-\frac{1}{k_1 - 1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_+ - 0.$$

$$y'(x) = \widetilde{D}(P_{x_- y_-}, y_-)\,(x - x_-)^{-\frac{1}{k_1 - 1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_- + 0.$$

Theorem 4. *Suppose $k_0 > 0$, $0 < k_1 < 1$. Let the function $p(x,u,v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u,v and satisfying inequalities* (2)*. Denote $p_+ = p(x_+, y_+, 0)$ and $p_- = p(x_-, y_-, 0)$. Then any decreasing μ-solution $y(x)$ to equation (1) is defined on a finite interval (x_-, x_+), has a zero at some point x_0 and finite limits $y_+ = \lim\limits_{x\to x_+-0} y(x)$ and $y_- = \lim\limits_{x\to x_-+0}$. Moreover,*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_+, y_+)\ (x_+ - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_+ - 0.$$

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_-, y_-)\ (x - x_-)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_- + 0.$$

Theorem 5. *Suppose $1 < k_1 < 2$. Let the function $p(x,u,v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u,v and satisfying inequalities* (2)*. Let there also $p(x,u,v) \to p_a^+$ as $x \to +\infty$, $u \to a$, $v \to 0$ and $p(x,u,v) \to p_a^-$ as $x \to -\infty$, $u \to a$, $v \to 0$. Then any decreasing μ-solution $y(x)$ to equation (1) has a zero at some point x_0, is defined on the whole axis and have finite limits $y_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ and $y_- = \lim\limits_{x\to-\infty}$. Moreover,*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p^+_{y_+},_+)\ (x - x_0)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p^-_{y_-}, y_-)\ (x_0 - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

Theorem 6. *Suppose $k_1 > 2$. Let the function $p(x,u,v)$ be continuous in x, Lipschitz continuous in u,v and satisfying inequalities* (2)*. Let there also exist limits p^+ as $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, $v \to 0$ and p^- as $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to 0$. Then $-1 < \alpha < 0$ and any decreasing solution to (1) has a zero at some point x_0 and has the following asymptotic behavior:*

$$y(x) = -C(p^+)\,(x - x_0)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y(x) = C(p^-)\,(x_0 - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

The research was supported by RSF, project number 20-11-20272.

References

[1] T. Korchemkina, On the behavior of solutions to second-order differential equation with general power-law nonlinearity, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **73** (2018), pp. 101–111.

[2] K. M. Dulina and T. A. Korchemkina, Asymptotic classification of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with negative potential, *Vestnik of Samara State University. Estestv. Ser.*, **128(6)** (2015), 50–56. [in Russian]

[3] K. M. Dulina and T. A. Korchemkina, Classification of solutions to singular nonlinear second-order Emden–Fowler type equations, *Proceedings of the International Conference and the Youth School "Information Technology and Nanotechnology Samara scientific centre of RAN, ISBN 978-5-93424-739-4, Samara*, June 2015, 45–46. [in Russian]

[4] V. M. Evtukhov, On asymptotic behavior of monotonous solutions to nonlinear differential equations, *Differential Equations*, **28(6)** (1992), pp. 1076–1078.

[5] I. V. Astashova. *Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations. In: Astashova I.V. (ed.) Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis: scientific edition*, UNITY-DANA Publ., Moscow, 2012, 22–290. [in Russian].

[6] I. V. Astashova, On quasi-periodic solutions to a higher-order emden-fowler type differential equation, *Boundary Value Problems*, **2014(174)** (2014), 1–8.

[7] I. V. Astashova, On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity, *Mathematical Modeling and Analysis*, **21(4)** (2016), 502–521.

[8] J. Jaroš, T. Kusano, On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator, *Funkcialaj Ekvacioj*, **43(5)** (2000), pp. 491–509.

[9] J. Jaroš, T. Kusano, On white hole solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations of the second order. *Funkcialaj Ekvacioj*, **45(3)** (2002), pp. 319–339.

[10] I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.

Lomonosov Moscow State University, Russia. Email: krtaalex@gmail.com

SEMICLASSICAL SPECTRAL ANALYSIS FOR BOCHNER-SCHRÖDINGER OPERATORS AND BEREZIN-TOEPLITZ QUANTIZATION

KORDYUKOV YU.A.

Let (X, g) be a closed Riemannian manifold, L a Hermitian line bundle on X with a Hermitian connection ∇^L and E a Hermitian vector bundle on X with a Hermitian connection ∇^E. We assume that the curvature $R^L = (\nabla^L)^2 \in \Omega^2(X)$ of ∇^L is non-degenerate.

Let $\Delta^{L^p\otimes E}$ be the Bochner Laplacian acting on $C^\infty(X, L^p \otimes E)$ by

$$\Delta^{L^p\otimes E} = \left(\nabla^{L^p\otimes E}\right)^* \nabla^{L^p\otimes E},$$

where $\left(\nabla^{L^p\otimes E}\right)^* : C^\infty(X, T^*X\otimes L^p\otimes E) \to C^\infty(X, L^p\otimes E)$ is the formal adjoint of $\nabla^{L^p\otimes E} : C^\infty(X, L^p\otimes E) \to C^\infty(X, T^*X \otimes L^p\otimes E)$. Let $V \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$

be a self-adjoint endomorphism of E. We study the Bochner-Schrödinger operator H_p acting on $C^\infty(X, L^p \otimes E)$ by

$$H_p = \frac{1}{p}\Delta^{L^p\otimes E} + V.$$

First, we give a rough asymptotic description of the spectrum of H_p in the semiclassical limit $p \to \infty$ in terms of the spectra of certain model operators. Under some conditions on the Riemannian metric g, this allows us to prove clustering of eigenvalues near certain numbers, which can be naturally called Landau levels. We fix such a cluster and develop calculus of Toeplitz operators acting on the eigenspace, corresponding to this cluster. We show that it provides a Berezin-Toeplitz type quantization of the manifold X equipped with the symplectic form $\mathbf{B} = iR^L$.

The research was partially supported by the development program of the Volga Region Mathematical Center, agreement N 075-02-2020-1478.

Institute of mathematics, Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, Russia. Email: yurikor@matem.anrb.ru

SOLVABILITY FOR A CLASS OF HIGHER ORDER NONLINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

LACHOURI A.[1], ARDJOUNI A.[2]

In this work, we study the existence and uniqueness of solutions to the following higher order fractional differential equations with multi-strip fractional integral boundary condition

$$\begin{cases} {}^{H}\mathfrak{D}^{\alpha}x(t) = f(t,x), \ t \in (1,T), \\ x(1) = 0, \ x'(1) = 0, \ x''(1) = 0, ..., x^{(n-2)}(1) = 0, \\ {}^{H}\mathfrak{D}^{\beta}x(T) = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i \left[{}^{H}\mathfrak{J}^{\lambda_i}x(\eta_i) - {}^{H}\mathfrak{J}^{\lambda_i}x(\rho_i) \right], \theta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

where ${}^{H}\mathfrak{D}^{\alpha}$, ${}^{H}\mathfrak{D}^{\beta}$ denotes the Hadamard fractional derivatives of orders α and β respectively, $n-1 < \alpha \leq n$, $n-2 < \beta < n-1$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, ${}^{H}\mathfrak{J}^{\lambda_i}$ is the Hadamard fractional integral of order $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., k$, $\eta_i, \rho_i \in (1,T)$, $1 < \rho_i < \eta_i < ... < \rho_k < \eta_k < T$, $f : [1,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a given continuous function.

To obtain our results, We convert the problem (1) into an equivalent integral equation. Then we construct appropriate mappings and employ the Schauder fixed point theorem to show the existence of a solution. We also use the Banach contraction principle to show the existence of a unique solution. At the end, an illustrative example will be introduced to validate the theoretical results.

References

[1] Ahmad B., Ntouyas S. K., *Nonlinear fractional differential equations and inclusions of arbitrary order and multi-strip boundary conditions*, Electron. J. Differ. Equ, 2012(98) (2012), 1–22.

[2] Duraisamy P., Nandha Gopal T., *Some Existence results for higher order fractional differential equations with multi-strip Riemann-Liouville type fractional integral boundary conditions*, Journal of Nonlinear Analysis and Application, 2019(1) (2019), 1–11.

[3] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

[4] Muthaiah S., Murugesan M., Thangaraj N. G., *Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problem of Hadamard Fractional Differential Equations*, Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application, 3(3) (2019), 162–173.

[5] Smart D. R., *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 66, Cambridge University Press: London-New York, 1974.

[1]Applied Mathematics Lab, Department of mathematics, University of Annaba, Algeria. Email: lachouri.adel@yahoo.fr

[2]Department of Mathematics and Informatics, University of Souk Ahras, Algeria. Email: abd_ardjouni@yahoo.fr

ASYMPTOTIC LOCALIZATION, MASSIVE FIELDS, AND GRAVITATIONAL SINGULARITIES

LEFLOCH P. G.

I will review three recent developments on Einstein's field equations under low decay or low regularity conditions. First, the Seed-to-Solution Method for Einstein's constraint equations, introduced in collaboration with T.-C. Nguyen, generates asymptotically Euclidean manifolds with the weakest or strongest possible decay (infinite ADM mass, Schwarzschild decay, etc.). The 'asymptotic localization problem' is also proposed an alternative to the 'optimal localization problem' by Carlotto and Schoen. We solve this new problem at the harmonic level of decay. Second, the Euclidian-Hyperboloidal Foliation Method, introduced in collaboration with Yue Ma, applies to nonlinear wave systems which need not be asymptotically invariant under Minkowski's scaling field and to solutions with low decay in space. We established the global nonlinear stability of self-gravitating massive matter field in the regime near Minkowski spacetime. Third, in collaboration with Bruno Le Floch and Gabriele Veneziano, I studied spacetimes in the vicinity of singularity hypersurfaces and constructed bouncing cosmological spacetimes of big bang-big crunch type. The notion of singularity scattering map provides a flexible tool for formulating junction conditions and, by analyzing Einstein's constraint equations, we established a surprising classification of all gravitational bouncing laws. Blog: philippelefloch.org

Sorbonne University and CNRS, France. Email: contact@philippelefloch.org

NUMERICAL APPROXIMATION OF TWO-DIMENSIONAL STOCHASTIC NEURAL FIELD EQUATIONS WITH FINITE TRANSMISSION SPEED

LIMA P.M.[1], SEQUEIRA T.

Neural field equations are intended to model the synaptic interactions between neurons in a continuous neural network, called a neural field [1], [2].This kind of integrodifferential equations proved to be a useful tool for the spatiotemporal modeling of the neuronal activity from a macroscopic point of view, allowing the study of a wide variety of neurobiological phenomena, such as the processing of sensory stimuli. The aim of the present talk is to study the effects of additive noise in one- and two-dimensional neural fields, while taking into account finite signal transmission speed. A Galerkin-type method to approximate such models is presented, which applies the Fast Fourier Transformation to optimise the computational effort required to solve this type of equations. Numerical simulations obtained by this algorithm are presented and discussed.

References

[1] Amari S.L., *Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields*, Biol. Cybernet., 27 (2), 1977, P. 77–87.

[2] Wilson, H.R. and Cowan, J.D., *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons*, Bipophys. J., 12, 1972, P. 1–24.

[1]Centro de Matematica Computacional e Estocastica, Instituto Superior Tecnico, Lisboa, Portugal. Email: plima@math.tecnico.ulisboa.pt

CONVEX TRIGONOMETRY

LOKUTSIEVSKIY L.V.

The talk will focus on the singularities of solutions of Hamiltonian systems describing geodesics on Finsler and sub-Finsler manifolds. The Hamiltonian is usually non-smooth, and therefore the uniqueness of solutions is lost. I will speak about a new apparatus of convex trigonometry, which makes it possible to prove the uniqueness of solutions at almost all points of nonsmoothness and fully investigate remaining ramification points. In the last 2 years, this apparatus allowed to make great progress in the study of sub-Finsler geodesics, and even to write out explicitly the formulae for geodesics on some manifolds that previously did not lend themselves to precise research. Examples are problems on the Cartan and Engel groups, all three-dimensional unimodular Lie groups, isoperimetric inequalities in the Finsler metric, etc.

References

[1] L. V. Lokutsievskiy, "Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry", Sb. Math., 210:8 (2019), 1179–1205

[2] L. V. Lokutsievskiy, "Explicit Formulae for Geodesics in Left-Invariant Sub-Finsler Problems on Heisenberg Groups via Convex Trigonometry", J. Dyn. Control Syst., 27 (2021), 661–681

[3] A. A. Ardentov, L. V. Lokutsievskiy, Yu. L. Sachkov, "Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry", ESAIM: COCV, 27 (2021), 32 , 52 pp.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Russia. Email: lion.lokut@gmail.com

ON A DIRICHLET PROBLEM IN A CONVEX DOMAIN

MAKAR-LIMANOV L.G.

In my talk I'll recall the story of a proof that the solution of a Dirichlet problem $\Delta u = -1$ in a convex domain which is zero on the boundary has only one local maximum and remind why this is true.

References

[1] Makar-Limanov L.G., *The solution of the Dirichlet problem for the equation* $\Delta u = -1$ *in a convex region*, (Russian) Mat. Zametki 9 (1971), 89–92.

Wayne State University, USA. Email: lml@wayne.edu

INVERSE PROBLEMS FOR THE KAWAHARA EQUATION WITH INTEGRAL OVERDETERMINATION

MARTYNOV E.V.

In the following research we study the inverse problems for the generalized Kawahara equation

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + F'(u)u_x = f(t,x) \tag{1}$$

$u = u(t,x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\mid F(u) \mid \leq c \mid u \mid^q$ where $1 < q < 6$ posed on a rectangle $Q_T = (0,T) \times (0,R)$ with the initial condition:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,R]; \tag{2}$$

boundary conditions:

$$u(t,0) = \mu(t), \quad u(t,R) = \nu(t); \tag{3}$$

$$u_x(t,0) = \theta(t), \quad u_x(t,R) = h(t), \tag{4}$$

$$u_{xx}(t,R) = \sigma(t), \quad t \in [0,T]; \tag{5}$$

with integral overdetermination:

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T]; \tag{6}$$

Impose the following conditions to some function ω:

$$\omega \in H^5(0,R), \quad \omega(0) = \omega(R) = \omega'(0) = \omega'(R) = \omega''(0) = 0. \tag{7}$$

The main results of our research are the following thoerems:

Theorem 1. *Let* $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_p^1(0,T)$, $\mu, \nu \in (H^{2/5} \bigcap L_p)(0,T)$, $h,\theta \in (H^{1/5} \bigcap L_p)(0,T)$, $f \in L_p(0,T; L_2(0,R))$ *for some* $p \in [2, +\infty]$, *the condition* (7) *is satisfied and, moreover,* $\omega'(R) \neq 0$,

$$\varphi(0) = \int_0^R u_0(x)\omega(x)dx. \tag{8}$$

Let

$$c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} +$$
$$\|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T)}.$$

Then

1). For fixed c_0 *there exists a* $T_0 > 0$ *such as if* $T \in (0, T_0)$, *then there exists a unique function* $\sigma \in L_p(0,T)$ *and the corresponding unique solution* $u \in X(Q_T)$ *of the problem* (1)-(3) *with condition* (6).

2). For fixed T *there exists a* $\delta > 0$ *such as if* $c_0 \leq \delta$, *then there exists a unique function* $\sigma \in L_p(0,T)$ *and the corresponding unique solution* $u \in X(Q_T)$ *of the problem* (1)-(3) *with condition* (6).

Theorem 2. *Let* $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_p^1(0,T)$, $\mu,\nu \in (H^{2/5} \bigcap L_p)(0,T)$, h, $\theta \in (H^{1/5} \bigcap L_p)(0,T)$, $\sigma \in L_{max(2,p)}(0,T)$ *for some* $p \in [1, +\infty]$ *the condition* (7) *is satisfied and there exists a positive constant* g_0 *such as for all* $t \in [0,T]$

$$g_0 \leq \mid \int_0^R g(t,x)\omega(x)dx \mid . \tag{9}$$

Let

$$c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} +$$

$$\|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\sigma\|_{L_2(0,T)} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)}.$$

Then

1). For fixed c_0 there exists a $T_0 > 0$ such as if $T \in (0, T_0)$, then there exists a unique function $f_0 \in L_p(0,T)$ and the corresponding unique solution $u \in X(Q_T)$ of the problem (1)-(3) *with condition* (6)*.*

2). For fixed T there exists a $\delta > 0$ such as if $c_0 \leq \delta$, then there exists a unique function $f_0 \in L_p(0,T)$ and the corresponding unique solution $u \in X(Q_T)$ of the problem (1)-(3) *with condition* (6)*.*

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

References

[1] Faminskii A. V., *Controllability Problems for the Korteweg de Vries Equation with Integral Overdetermination*, Differential Equations, Vol. 55, No. 01 2019.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Russia.
Email: e.martynov_inbox.ru

MESO-SCALE UNIFORM ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS FOR SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS

MAZ'YA V.G.[1], MOVCHAN A.B.[2]

There is a growing interest to problems in physics and mechanics associated with domains whose boundaries are singularly perturbed. In particular, heterogeneous solids containing large number of inclusions or perforations represent the object of studies, which may require advanced numerical methods or analytical homogenisation approximations. The numerical evaluation of physical fields around multiple defects of different scales, and full computational analysis of their interaction, represent a serious challenge. The asymptotic approximations, which take into account a large number of inclusions within the cluster and different scales reflecting on the size of individual inclusions, offer an efficient analytical tool, which can also enhance the existing numerical schemes. Green's functions, and their uniform asymptotic approximations, are of special interest, as motivated by the pioneering work of J. Hadamard. The uniformity of the asymptotic approximations is important, as well as the formal link between Green's functions and solutions of boundary value problems for meso-scale structures, containing large clusters of defects. In mechanics, such systems involve large number of small inclusions, so that a small paramater, the relative size of an inclusion, may compete with a large parameter, representing an overall number of inclusions. We demonstrate that the approach of meso-scale asymptotic approximations provides an effective alternative to the conventional homogenisation algorithms for solids with large clusters of small inclusions. Also, problems of vibrations in domains with meso-scale structured interfaces are discussed in detail. Theoretical results are accompanied by numerical simulations and illustrative examples.

[1]Department of Mathematics, Linköping University, Sweden.
Email: vladimir.mazya@liu.se

[2]Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, UK.
Email: abm@liverpool.ac.uk

STOCHASTIC SEMIGROUPS ASSOCIATED WITH PARTIAL DIFFERENTIAL AND PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

MELNIKOVA I.V.[1], BOVKUN V.A.[2]

The lecture is devoted to operator semigroups topical both from the point of view of applications and studying solution operators to PDE s and some more general ΨDE s.

The semigroups under study describe important probability characteristics of stochastic processes, defined as functions of transition probabilities $P(0,x;t,B)$:

$$U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0,x;t,dy) = \langle f(\cdot), p(0,x;t,\cdot)\rangle \qquad (1)$$

and transition densities p, in general, generalized functions. For $U(t)$, $t \geq 0$, related to Markov processes, the semigroup property follows from the Kolmogorov-Chapman equation:

$$P(s,x;t,B) = \int_{\mathbb{R}^n} P(s,x;r,dy)P(r,y;t,B),\ 0 \leq s \leq r \leq t.$$

Markov semigroups are families with the following properties:

$$U(t)1 = 1; \quad f \geq 0 \Rightarrow U(t)f \geq 0; \quad f \leq 1 \Rightarrow U(t)f \leq 1;\ f \in B_b(\mathbb{R}^n).$$

The relevance of studying semigroups associated with Levy processes, the important subclass of Markov processes, is due to the fact that Levy processes allow simulating various continuous and jumps random disturbances arising in physics, economics, social and biosystems. Along with the study of semigroups, an important place in the lecture is given to semigroup generators, which are proven to be ΨDOs and operators with kernels.

The modern theory of operators has provided techniques for studying PDE s and more general ΨDE s for probability characteristics of LΓ©vy processes (see, e.g. [1], [2]). Moreover, techniques of operator semigroups combined with the generalized Fourier transform techniques allowed us to extend the Gelfand-Shilov classification of Cauchy problems for PDE s to some subclass of ΨDE s, including problems related to Levy processes, which we classify as problems well-posed in the Petrovsky sense. The lecture is divided into three sections. In Section 1, we consider the semigroups of operators $U_1(t) - U_4(t), t \geq 0$, associated with basic LΓ©vy processes: shift, Wiener, simple and compound Poisson processes. It is shown that the considered semigroups are representable in the form (1) with the transition densities p, generally, generalized functions on the space C_0.

Section 2 shows that the generators of an important subclass of Markov semigroups, Levy semigroups, are ΨDO s with symbols $s(x, \alpha)$ of not more then power growth in α and locally bounded in x, and operators with kernels from the space $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. The proof is based on the famous Levy–Khintchine formula and Schwarz's kernel theorem. A construction of kernels is given for generators of semigroups $U_1 - U_4$ and for the semigroups themselves.

In Section 3, on the basis of the generalized Fourier transform techniques, an extension of the Gelfand–Shilov classification is constructed for the case of equations with ΨDOs of a special form. The scheme establishing connections between properties of solution operators to the Fourier transformed Gelfand–Shilov systems and the semigroup properties of the solution operators [3] has been extended to equations, that contain ΨDO s associated with Levy processes.

References

[1] Applebaum D. *Levy processes and stochastic calculus.* Cambridge University Press, 2009. 492 p.

[2] Melnikova I. V., Bovkun V.A., and Alekseeva U.A. *Integro-Differential Equations Generated by Stochastic Problems.* Diff. Equations, 2021, Vol.57, No.3, pp. 379-390.

[3] Melnikova I.V., Alekseeva U.A. *Semigroup Classification and Gelfand–Shilov Classification of Systems of Partial Differential Equations* Math. Notes, 2018, Vol.104, No. 6, pp. 98-111.

[1]Ural State University, Russia. Email: irina.melnikova@urfu.ru

[2]Ural State University, Russia. Email: vadim.bovkun@urfu.ru

PERIODIC SOLUTIONS OF A NEUTRAL DELAY MODEL OF SINGLE-SPECIES POPULATION GROWTH WITH ITERATIVE TERMS

MEZGHICHE L.[1], KHEMIS R.[2], BOUAKKAZ A.[3]

In this work, we consider the following first-order neutral delay differential equation:

$$\begin{aligned}[x(t)-cx(t-\tau(t))]' = -a(t)x(t) + f\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right) \\ - H\left(t, x(t), x^{[2]}(t)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

where $c \in [0,1[$, $a(t), \tau(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, (]0,\infty[))$ and $f, H \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^3,]0,\infty[\right)$ are T-periodic functions. With the help of Banach and Krasnoselskii's fixed point theorems, the existence and uniqueness of positive periodic solutions to the equation (1) are established.

Let P_T be the Banach space of all $T-$periodic continuous functions endowed with the usual sup norm and

$$\mathbb{K} = \{x \in P_T,\ m \leq x \leq M,\ |x(t_2)-x(t_1)| \leq L|t_2-t_1|, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

is a closed convex and bounded subset of P_T. To simplify notations, we introduce the following constants:
$a_0 = \inf_{t\in[0,T]} a(t)$, $a_1 = \sup_{t\in[0,T]} a(t)$, $f_1 = \max_{t\in[0,T]} |f(t,0,0)|$,
$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{2} k_i \sum_{j=0}^{i-1} L^j$, $\Lambda_2 = \sum_{i=1}^{2} l_i \sum_{j=0}^{i-1} L^j$
$H_1 = \max_{t\in[0,T]} |H(t,0,0)|$, $\eta_1 = \frac{\exp\left(-\int_0^T a(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right)-1}$, $\eta_2 = \frac{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right)-1}$. In this work, we assume that:
($\mathbf{H}_1$) $f(t,x_1,x_2)$ and $H(t,x_1,x_2)$ are globally Lipschitz in x_1, x_2, i.e. there exist positive constants k_1, k_2 and l_1, l_2 such that:

$$|f(t,x_1,x_2) - f(t,y_1,y_2)| \leq \sum_{i=1}^{2} k_i \|x_i - y_i\|, \tag{2}$$

$$|H(t,x_1,x_2) - H(t,y_1,y_2)| \leq \sum_{i=1}^{2} l_i \|x_i - y_i\|. \tag{3}$$

($\mathbf{H}_2$) There exists $f_0 > 0$ such that:

$$f(t,x_1,x_2) \geq f_0,\ \forall t \in [0,T],\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

($\mathbf{H}_3$) The following estimates are satisfied:

$$\eta_2 T\Lambda_1 + \eta_2 T\frac{f_1}{M} + c \leq 1, \tag{5}$$

$$\frac{\eta_1 T f_0 - \eta_2 T\left(M\Lambda_2 + H_1\right) - cT\eta_2 a_1 M}{m} + c \geq 1, \tag{6}$$

$$\eta_2\left(2 + a_1 T\right)\left(\left(\Lambda_1 M + f_1\right) + \left(\Lambda_2 M + H_1\right) + cMa_1\right) + L\left(1 + L\right)c \leq L\ . \tag{7}$$

Theorem 1. *If conditions* (2)-(7) *hold, then equation* (1) *has at least one solution in* $\mathbb{K}$.

Theorem 2. *Suppose* (2) *and* (3) *are satisfied and if*

$$\eta_2 T\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + ca_1\right) + c < 1, \tag{8}$$

then equation (1) *has a unique solution in* $\mathbb{K}$.

References

[1] Bouakkaz A., Ardjouni A., Djoudi A., *Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation with iterative terms by Schauder fixed point theorem*, Acta Math. Univ. Comenian 17, 230-238 ,2017.

[2] Bouakkaz A., Khemis R., *Positive periodic solutions for revisited Nicholson's blowflies equation with iterative harvesting term*, J. Math. Anal. Appl 494, 124663, 2021.

[3] Khemis R., Ardjouni A.,Bouakkaz A., Djoudi A., *Existence of periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential equation by the Krasnoselskii's fixed point technique*, Le Matematiche 72, 145-156, 2017.

[1]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955 Skikda, Algeria.
Email: linomezg3@gmail.com

[2]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955 Skikda, Algeria.
Email: kbra28@yahoo.fr

[3]LAMAHIS Laboratory, University of 20 August 1955 Skikda, Algeria.
Email: ahlemkholode@yahoo.com

CHARACTERESTIC LIE ALGEBRA OF KLEIN-GORDON EQUATION AND HIGHER SYMMETRIES

MILLIONSHCHIKOV D.V.

Consider Klein-Gordon equation written in the form $u_{xy} = f(u)$. We define characteristic Lie algebra $\chi(f)$ as a Lie subalgebra in the Lie algebra of differential operators generated by two operators

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, X_f = f\frac{\partial}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots,$$

where $D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots$ The properties of the characteristic Lie algebra $\chi(f)$ are related to the integrability of Klein-Gordon equation. We are going to discuss characteristic Lie algebras of two integrable cases: sine-Gordon $f(u) = \sinh h$ equation and Tzitzeica $f(u) = e^u + e^{2u}$ equation.

References

[1] Millionshchikov D. V., Smirnov S.V. *Characteristic Lie algebras and exponential systems*, Ufa Math. Journal, **13**:2 (2021), 41–69.

Moscow State University & Gubkin Oil and Gas University, Russia.
Email: dmitry.millionschikov@math.msu.ru

SYNCHRONIZATION OF QUASIPERIODIC OSCILLATIONS IN NEARLY HAMILTONIAN SYSTEMS: THE DEGENERATE CASE

MOROZOV A.D.[1], MOROZOV K.E.[2]

Quasiperiodic perturbations of two–dimensional nearly Hamiltonian systems with a limit cycle are considered. We study the behavior of solutions in the neighborhood of a degenerate resonance, i.e. such a resonance that correspond to an extremum of the natural frequency of the unperturbed Hamiltonian system. Special attention is paid to the synchronization problem. Bifurcations of quasiperiodic solutions that take place when the limit cycle passes through the neighborhood of a resonance phase curve are studied. This study is based on the analysis of an autonomous nearly Hamiltonian system of a pendulum type, which is obtained by the method of averaging and determines the dynamics in the resonance zone. To a first approximation, two possible topological structures of the averaged system are distinguished. For each case, the intervals of a control parameter that correspond to the synchronization of oscillations are specified. The results are applied to an equation of a Duffing–Van der Pole type.

The research was supported by RFBR grant 20-31-90039.

References

[1] Morozov A.D., Morozov K.E., Synchronization of quasiperiodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: the degenerate case//Chaos,31, 083109, August 2021.

[1]Nizhni Novgorod State University, Russia. Email: morozov@mm.unn.ru
[2]Nizhni Novgorod State University, Russia. Email: kirwamath@gmail.com

BOUNDS ON THE SPEED OF SUBSPACE EVOLUTION

MOTOVILOV A.K.

Let H be a (possibly unbounded) self-adjoint operator on a Hilbert space $\mathfrak{H}$. Assume that P_0 is an orthogonal projection in $\mathfrak{H}$ such that the domain $\mathrm{Dom}(H)$ of H is invariant under P_0, i.e.,

$$P_0\,\mathrm{Dom}(H) \subset \mathrm{Dom}(H). \tag{1}$$

Under the hypothesis (1), we study the subspace path

$$\mathfrak{P}_\tau := \mathrm{Ran}\big(P_\tau\big), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

formed by the ranges of the orthogonal projections $P_\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\tau} P_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}H\tau}$.

Below, the notation $\vartheta(\mathfrak{R},\mathfrak{Q})$ is used for the maximal angle between subspaces $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{Q}$ of the Hilbert space $\mathfrak{H}$,

$$\vartheta(\mathfrak{R},\mathfrak{Q}) := \arcsin\big(\|R-Q\|\big), \tag{3}$$

where R and Q are the orthogonal projections in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{Q}$, respectively. By using the maximal angle (3) as the measure of closeness between subspaces in the path (2) we estimate the speed of their variation with varying τ. Our first principal result concerning the subspace path (2) is as follows.

Theorem 1. *Assume the hypothesis* (1). *Assume, in addition, that*

$$V_{H,P_0} := \sup_{\substack{f\,\in\,\mathfrak{P}_0\,\cap\,\mathrm{Dom}(H)\\ \|f\|=1}} \|(I-P_0)Hf\| < \infty, \tag{4}$$

where I is the identity operator in $\mathfrak{H}$. Then the following sharp inequality holds:

$$\vartheta\big(\mathfrak{P}_s,\mathfrak{P}_t\big) \le V_{H,P_0}\,|t-s| \quad \textit{for any } s,t\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Corollary 1. *Suppose that $V_{H,P_0} \neq 0$. Assume that at $\tau = T_\theta$ the maximal angle between the initial subspace $\mathfrak{P}_0$ and a subspace in the path $\mathfrak{P}_\tau$, $\tau \ge 0$, reaches the value of θ, $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$, that is, $\vartheta(\mathfrak{P}_0,\mathfrak{P}_{T_\theta}) = \theta$. Then*

$$T_\theta \;\ge\; \frac{\theta}{V_{H,P_0}}\,. \tag{6}$$

Theorem 2. *Assume the hypothesis* (1). *Assume, in addition, that*

$$\Delta E_{\mathfrak{P}_0} := \sup_{\substack{f\,\in\,\mathfrak{P}_0\,\cap\,\mathrm{Dom}(H)\\ \|f\|=1}} \big(\|Hf\|^2 - \langle Hf,f\rangle^2\big)^{1/2} < \infty. \tag{7}$$

If $\Delta E_{\mathfrak{P}_0} \neq 0$ then the following lower bound holds:

$$T_\theta \ge \frac{\theta}{\Delta E_{\mathfrak{P}_0}}\,, \tag{8}$$

where θ, T_θ are the same as in Corollary 1.

Inequality (8) represents a generalization of the celebrated bounds on the speed of variation of one-dimensional subspaces known in quantum theory as the Mandelstam-Tamm and Fleming quantum speed limits.

Our final lower estimate for T_θ concerns the special case of bounded H.

Theorem 3. *Let H be a bounded self-adjoint operator on the Hilbert space $\mathfrak{H}$. Suppose that the spectrum of H lies in the segment $[m, M]$ and $m < M$. Then the following lower bound holds:*

$$T_\theta \geq \frac{2\theta}{M - m}, \tag{9}$$

where θ and T_θ are the same as in Corollary 1.

This presentation is based on joint works [1, 2] with Sergio Albeverio.

References

[1] Albeverio S., Motovilov A.K., *Quantum speed limits for time evolution of a system subspace*, arXiv:2011.02778 (2020) [8 pages].

[2] Albeverio S., Motovilov A.K., *Optimal bounds on the speed of subspace evolution*, arXiv:2111.05677 (2021) [14 pages].

Bogoliubov Laboratory for Theoretical Physics, JINR, Dubna, Russia.
Email: motovilv@theor.jinr.ru

ON A GELFAND-SHILOV TYPE SPACE

MUSIN I.KH.

Let $\mathcal{H} = \{h_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ be a family of convex functions $h_\nu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ with $h_\nu(0) = 0$ such that for each $\nu \in \mathbb{N}$:

1) $h_\nu(x) = h_\nu(|x_1|, \dots, |x_n|),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

2) $h_{\nu|[0,\infty)^n}$ is nondecreasing in each variable;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$;

4) $\forall\, M > 0\ \ \exists\, A_{\nu,M} > 0$ s.t. for $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$

$$h_\nu(x) \leq \sum_{1 \leq j \leq n : x_j \neq 0} x_j \ln \frac{x_j}{M} + A_{\nu,M};$$

5) $\exists\, a_\nu > 0$ and $\exists\, \gamma_\nu > 0$ s.t. for $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n$

$$h_\nu(x) - h_{\nu+1}(x) \geq a_\nu \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j - \gamma_\nu;$$

6) $\exists\, l_\nu > 0$ such that for $x, y \in [0,\infty)^n$

$$h_{\nu+1}(x+y) \le h_\nu(x) + h_\nu(y) + l_\nu.$$

For each $\nu \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{Z}_+$ define the normed space

$$G_m(h_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) :$$

$$\|f\|_{m,h_\nu} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n, |\alpha|\le m} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{\beta! e^{-h_\nu(\beta)}} < \infty\}$$

Let $G(h_\nu) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(h_\nu)$. Endow $G(h_\nu)$ with the topology defined by the family of norms $\|\cdot\|_{m,h_\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Considering $G(\mathcal{H}) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} G(h_\nu)$ supply it with the topology of the inductive limit of spaces $G(h_\nu)$.

For $f \in G(\mathcal{H})$ let $(\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}^n$.

The Young-Fenchel conjugate of a function $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ is the function $g^* : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ defined by $g^*(x) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - g(y))$.

For $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ consider the normed space

$$\mathcal{E}_m(h_\nu) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :$$

$$\rho_{m,\nu}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\alpha! e^{-h_\nu(\alpha)}} < \infty\}.$$

Let $\mathcal{E}(h_\nu) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_m(h_\nu)$. Endow $\mathcal{E}(h_\nu)$ with the topology defined by the family of norms $\rho_{m,\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$. Let $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{E}(h_\nu)$. Supply $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ with an inductive limit topology of spaces $\mathcal{E}(h_\nu)$.

Denote by $\mathcal{A}$ the mapping $f \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \to F_f$, where F_f is the (unique) extension to entire function in $\mathbb{C}^n$.

For each $\nu \in \mathbb{N}$ define a function φ_ν on $\mathbb{R}^n$ by

$$\varphi_\nu(x) = h_\nu^*(\ln^+ |x_1|, \ldots, \ln^+ |x_n|),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

For each $\nu \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{Z}_+$ consider the normed space

$$E_m(\varphi_\nu) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) :$$

$$p_{\nu,m}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1+\|z\|)^m}{e^{\varphi_\nu(Im\, z)}} < \infty\}.$$

Let $\Phi = \{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ and $E(\Phi) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E(\varphi_\nu)$. Supply $E(\Phi)$ with a topology of the inductive limit of spaces $E(\varphi_\nu)$.

Theorem 1. *The mapping $\mathcal{A}$ establishes an isomorphism between the spaces $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ and $E(\Phi)$.*

Theorem 2. *The mapping $\mathcal{A}\mathcal{F}$ establishes an isomorphism between the spaces $G(\mathcal{H})$ and $E(\Phi)$.*

Theorem 3. *The Fourier transformation establishes an isomorphism between $G(\mathcal{H})$ and $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.*

Institute of Mathematics with Computing Centre of Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia.
Email: musin_ildar@mail.ru

LANDIS PROBLEMS. RECENT PROGRESS

NADIRASHVILI N.S.

Survey of works related to the problems raised by E.M.Landis, from old results to the most recent ones.

Centre national de la recherche scientifique, France.
Email: nnicolas@yandex.ru

ON THE PHRAGMÉN-LINDELÖF PRINCIPLE FOR MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN UNBOUNDED DOMAIN

NAZAROV A.I.

We investigate the qualitative properties of solutions to the Zaremba type problem in unbounded domain for the non-divergence elliptic equation degenerating at infinity. We establish the Phragmén-Lindelöf type principle on growth/decay of a solution at infinity. The result is formulated in terms of so-called s-capacity (the concept introduced by E.M. Landis in 1960s) of the Dirichlet portion of the boundary, while the Neumann boundary should satisfy certain "admissibility" condition.

The talk is based on the joint paper [1].

References

[1] D. Cao, A. Ibragimov, A.I. Nazarov, Mixed boundary value problems for non-divergence type elliptic equations in unbounded domain, *Asymptotic Analysis*, **109** (2018), N1-2, 75–90.

PDMI RAS and St. Petersburg State University, Russia.
Email: al.il.nazarov@gmail.com

ASYMPTOTICS AT INFINITY OF SOLUTIONS TO ELLIPTIC PROBLEMS IN ANGULATE DOMAINS WITH ALTERNATING BOUNDARY CONDITIONS

NAZAROV S.A.

Although results are obtained for general second-order formally self-adjoint systems with polynomial property [1], we here consider the mixed boundary-value problem for the Poisson equation

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega,\ \ u(x) = 0,\ x \in \Gamma_D,\ \ \partial_n u(x) = 0,\ x \in \Gamma_N, \qquad (1)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a domain with a Lipschitz boundary which, outside the disk $\mathbb{B}_R$ of radius $R > 0$, coincides with the angle

$$\mathbb{K} = \{x : r > 0, \varphi \in (0, \alpha)\}$$

of opening $\alpha \in (0, 2\pi)$. Moreover, Γ_D contains the ray

$$\Upsilon_\alpha = \{x : r > R, \varphi = \alpha\}$$

and the set of intervals

$$\gamma^j = \{x : x_2 = 0, x_1 - R \in (-bj^{-m}, bj^{-m})\} \subset \Upsilon_0, \quad b > 0,\ m \geq 0, \qquad (2)$$

while $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_D}$.

The case $m = 0$ when the intervals (2) are distributed periodically along the abscissa axis, was in essence considered in the paper [2] and the infinite asymptotic series at infinity was constructed involving power-logarithmic functions $r^\lambda \Phi(\varphi; \ln r)$ written in the polar coordinates (r, φ) as well as the boundary layers $r^\mu \Psi(x; \ln r)$ located near the ray Υ_0. Here, Φ is a polynomial in $\ln r$ with coefficients in $C^\infty[0, \alpha]$ while the polynomial Ψ has coefficients periodic in x_1 and exponentially decaying as $x_2 \to +\infty$. The negative exponents λ and μ are taken from certain countable sets given in [2]. In particular, for a compactly supported right-hand side f, the main term takes the form

$$K_0 r^{-\pi/\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right) \qquad (3)$$

with some coefficient $K_0 \in \mathbb{R}$.

In the case $m > 0$ the lengths of the intervals (2) vanish in the limit as $j \to +\infty$. However, the asymptotic results mentioned above remain valid, in particular, the main asymptotic term keeps the form (3). However, higher-order asymptotic terms get boundary layers of two types, namely the periodic in x_1 exponential ones near Υ_0 and the power-law ones in the vicinity of the interlas γ^j.

The main difficulty in the performed analysis of the problem (1) concerns the justification of the asymptotic formulas that requires derivation of various weighted a priori estimates of the solution, reduction of the original problem to the pure Dirichlet problem in the angle $\mathbb{K}$, and restoration of decay properties of the asymptotic remainders near the boundary ray Υ_0.

References

[1] Nazarov S. A. *The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes.* Uspehi mat. nauk. 1999. **54**, 5. 77–142 (English transl.: Russ. Math. Surveys. 1999. **54**, 5. 947–1014).

[2] Nazarov S. A. *Asymptotics of the solution of a Dirichlet problem in an angular domain with a periodically changing boundary.* Math. Notes. 1991. **49**, 5. 502-509.

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia. Email: srgnazarov@yahoo.co.uk

NARROW ESCAPE PROBLEM

NURSULTANOV M.[1], TZOU J.C.[2], TZOU L.[3]

Let $(M, g, \partial M)$ be a compact connected orientable Riemannian manifold with non-empty smooth boundary. Let also $(X_t, \mathbb{P}_x)$ be the Brownian motion on M with initial condition at x, that is, the stochastic process generated by the Laplace-Beltrami operator Δ_g. For any $\Gamma \subset \partial M$ open we denote by τ_Γ the first time the Brownian motion X_t hits Γ:

$$\tau_\Gamma := \inf\{t \geq 0 : X_t \in \Gamma\}.$$

In the case when $\Gamma = \Gamma_{\epsilon,a}$ is a small elliptic window of eccentricity $\sqrt{1-a^2}$ and size $\epsilon \to 0^+$, the narrow escape/mean first arrival time problem wishes to derive an asymptotic expansion as $\epsilon \to 0$ for the expected value $\mathbb{E}[\tau_{\Gamma_{\epsilon,a}} | X_0 = x]$ of the first arrival time $\tau_{\Gamma_{\epsilon,a}}$ amongst all Brownian particles starting at x.

Many problems in cellular biology may be formulated as mean first arrival time problems; a collection of analysis methods, results, applications, and references may be found in [5]. For example, cells have been modelled as simply connected two-dimensional domains with small absorbing windows on the boundary representing ion channels or target binding sites; the quantity sought is then the mean time for a diffusing ion or receptor to exit through an ion channel or reach a binding site [8, 4, 6].

There has been much progress for this problem in the setting of planar domains, and we refer the readers to [4, 6, 10, 1] and references therein for a complete bibliography. An important contribution was made in the planar case by [1] to introduce rigor into the computation of [6]. The use of layered potential in [1] also cast this problem in the language of elliptic PDE and facilitates some of the approach we use here.

Few results exists for three dimensional domains in $\mathbb{R}^n$ or Riemannian manifolds; see [2, 7, 9, 3] and references therein. The additional difficulties introduced by higher dimension are highlighted in the introduction of [1] and the challenges in geometry are outlined in [9]. In the case when M is a domain in $\mathbb{R}^3$ with Euclidean metric and $\Gamma_{\epsilon,a}$ is a single small disk absorbing window, [7, 9] gave an expansion for the average of the expected first arrival time, averaged over M, up to an unspecified $O(1)$ term.

In this paper we outline an approach which allows one to derive all the main terms of $\mathbb{E}[\tau_{\Gamma_{\epsilon,a}}|X_0 = x]$ for Riemannian manifolds of dimension three with a small absorbing window which is boundary geodesic ellipse.

References

[1] Habib Ammari, Kostis Kalimeris, Hyeonbae Kang, and Hyundae Lee. Layer potential techniques for the narrow escape problem. J. Math. Pures Appl. (9), 97(1):66-84, 2012.

[2] Alexei F Cheviakov, Michael J Ward, and Ronny Straube. An asymptotic analysis of the mean first passage time for narrow escape problems: Part II: The sphere. Multiscale Modeling and Simulation, 8(3):836-870, 2010.

[3] Daniel Gomez and Alexei F. Cheviakov. Asymptotic analysis of narrow escape problems in nonspherical three-dimensional domains. Phys. Rev. E, 91:012137, Jan 2015.

[4] D Holcman and Z Schuss. Escape through a small opening: receptor trafficking in a synaptic membrane. Journal of Statistical Physics, 117(5-6):975-1014, 2004.

[5] David Holcman and Zeev Schuss. Stochastic narrow escape in molecular and cellular biology. Analysis and Applications. Springer, New York, 2015.

[6] S Pillay, Michael J Ward, A Peirce, and Theodore Kolokolnikov. An asymptotic analysis of the mean first passage time for narrow escape problems: Part I: Two-dimensional domains. Multiscale Modeling and Simulation, 8(3):803-835, 2010.

[7] Zeev Schuss, Amit Singer, and David Holcman. Narrow escape, part i. Journal of Statistical Physics, 122(41):437-463, 2006.

[8] Zeev Schuss, Amit Singer, and David Holcman. The narrow escape problem for diffusion in cellular microdomains. Proceedings of the National Academy of Sciences, 104(41):16098-16103, 2007.

[9] Amit Singer, Z Schuss, and D Holcman. Narrow escape and leakage of Brownian particles. Physical Review E, 78(5):051111, 2008.

[10] Amit Singer, Zeev Schuss, and David Holcman. Narrow escape, part II: The circular disk. Journal of statistical physics, 122(3):465-489, 2006.

[1]Mathematics and statistics, University of Helsinki.
Email: medet.nursultanov@gmail.com
[2]Department of Mathematics and Statistics, Macquarie University.
Email: tzou.justin@gmail.com
[3]School of Mathematics and Statistics, University of Sydney.
Email: leo.tzou@gmail.com

A NOTE ON THE EIGENVALUE CRITERIA FOR POSITIVE SOLUTIONS OF A CANTILEVER BEAM EQUATION WITH FREE END

PADHI SESHADEV

In this paper, we study the existence of at least one positive solution to the fourth-order two-point boundary value problem(BVP)

$$\begin{cases} u''''(t) = \lambda q(t) f(t, u(t)), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0, \end{cases}$$

which models a cantilever beam equation, where one end is kept free. Here

$$f \in \mathcal{C}\left([0,1] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\right), \quad g \in \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{R}_+\right)$$

and λ is a positive parameter. The sufficient conditions are interesting, new and easy to verify. We have used some inequalities on the nonlinear function f and eigenvalues of a linear integral operator as bounds for the parameter λ in order to obtain our results. Our approach is based on a revised version of a fixed point theorem due to Gustafson and Schmitt.

Birla Institute of Technology Mesra Ranchi – 835215, India.
Email: spadhi@bitmesra.ac.in

ON ENTROPY SOLUTIONS OF SCALAR CONSERVATION LAWS WITH DISCONTINUOUS FLUX

PANOV E.YU.

In the half-space $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ we consider the conservation law

$$u_t + \mathrm{div}_x \varphi(u) = 0 \tag{1}$$

with a jump continuous flux vector $\varphi(u)$. The curve $(u, \varphi(u))$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ is known to admit a continuous extension

$$u = b(v) \in C(\mathbb{R}), \quad \varphi(u) = g(v) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

such that the function $b(v)$ is non-strictly increasing and $|b(v)| \to \infty$ as $v \to \infty$. After the change $u = b(v)$ equation (1) reduces to the equation

$$b(v)_t + \mathrm{div}_x g(v) = 0 \tag{2}$$

We study the Cauchy problem for equation (1) with initial data

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Definition 1 (cf. [1])**.** A function $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ is called an entropy solution (e.s.) of problem (1), (3) if there exists a measure valued solution $\nu_{t,x}(v)$ of equation (2) such that the push-forward measure $(b^*\nu_{t,x})(u)$ coincides with the Dirac mass $\delta(u - u(t, x))$ for a.e. $(t, x) \in \Pi$, and $\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} u(t, \cdot) = u_0$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

We recall (see [2]) that $\nu_{t,x}$ is a measure valued solution of (2) if for all $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int |b(v) - b(k)| d\nu_{t,x}(v) + \mathrm{div}_x \int \mathrm{sgn}(v - k)(g(v) - g(k)) d\nu_{t,x}(v) \le 0$$

in the sense of distributions on Π. We observe also that in view of the assumption $(b^*\nu_{t,x})(u) = \delta(u - u(t, x))$ we can write

$$\int |b(v) - b(k)| d\nu_{t,x}(v) = |u(t, x) - b(k)|.$$

The main our result is the existence of the largest and the smallest e.s. of (1), (3). In the case of continuous flux vector this property was known, see [3]. In particular, this result implies the uniqueness of e.s. in the case of periodic initial data and the following more general comparison principle.

Theorem 1. *Let $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ be e.s. of* (1), (3) *with initial functions u_{01}, u_{02}, respectively. If $u_{01} \le u_{02}$ a.e. in $\mathbb{R}^n$ and at least one of these initial functions is periodic then $u_1(t, x) \le u_2(t, x)$ a.e. in Π.*

The research was supported by RSF grant 22-21-00344.

References

[1] *Bulíček M., Gwiazda P., Málek J., Świerczewska Gwiazda A.* On scalar hyperbolic conservation laws with a discontinuous flux. Math. Models Methods Appl. Sci. 21:1 (2011) 89–113.

[2] *Panov E. Yu.* On measure-valued solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation. Izv: Math. 60:2 (1996) 335–377.

[3] *Panov E. Yu.* Maximum and minimum generalized entropy solutions to the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation. Sb. Math. 193:5 (2002) 727–743.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University and Peoples' Friendship University (RUDN), Russia. Email: Eugeny.Panov@novsu.ru

ON ONE NONLOCAL PROBLEM FOR SECOND ORDER LINEAR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

PARTSVANIA N.

On a finite open interval $]a, b[$, we consider the linear differential equation

$$u'' = p_1(t)u + p_2(t)u' + q(t) \tag{1}$$

with the nonlocal boundary conditions

$$\int_a^{a_0} u(t)d\varphi_1(t) = c_1, \quad \int_{b_0}^{b} u(t)d\varphi_2(t) = c_2. \tag{2}$$

Here $p_i \, :]a, b[\to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ and $q \, :]a, b[\to \mathbb{R}$ are measurable functions, satisfying the conditions

$$\int_a^b \big((t-a)(b-t)|p_1(t)| + |p_2(t)|\big)dt < +\infty, \quad \int_a^b (t-a)(b-t)|q(t)|dt < +\infty, \tag{3}$$

$a < a_0 < b_0 < b$, c_i $(i = 1, 2)$ are real numbers, while $\varphi_1 : [a, a_0] \to \mathbb{R}$ and $\varphi_2 : [b_0, b] \to \mathbb{R}$ are nondecreasing functions such that

$$\varphi_1(a_0) > \varphi_1(a), \quad \varphi_2(b) > \varphi_2(b_0).$$

We assume that the values of any solution to equation (1) at the points a and b are its right and left limits, respectively, the existence of which is guaranteed by condition (3).

We are mainly interested in the case where the functions p_1 and q have nonintegrable singularities at the points a and b. However, the results below on the unique solvability of problem (1), (2) are new even in the case where those functions are integrable on $[a, b]$.

For any continuously differentiable function w defined on some interval $I \subset [a, b]$, we put

$$h_1(p_1, p_2, w)(t) \equiv [p_1(t)]_- w(t) + [p_2(t)]_- w'(t),$$
$$h_2(p_1, p_2, w)(t) \equiv [p_1(t)]_- w(t) - [p_2(t)]_+ w'(t).$$

Theorem 1. *Let conditions* (3) *hold and there exist a number* $t_0 \in]a, b[$ *and continuously differentiable functions* $w_1 \; : \; [a, t_0] \; \to \; [0, +\infty[$ *and*

$w_2 : [t_0, b] \to [0, +\infty[$ *such that*

$$w_1(a) = 0, \;\; w_1'(t) > 0, \;\; \int\limits_t^{t_0} h_1(p_1, p_2, w_1)(s)ds \le w_1'(t) \;\; \text{for} \;\; a \le t < t_0,$$

$$w_2(b) = 0, \;\; w_2'(t) < 0, \;\; \int\limits_{t_0}^{t} h_2(p_1, p_2, w_2)(s)ds \le |w_2'(t)| \;\; \text{for} \;\; t_0 < t \le b,$$

$$\limsup_{t\to t_0} \int\limits_t^{t_0} \frac{h_1(p_1, p_2, w_1)(s)}{w_1'(t)} ds + \limsup_{t\to t_0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{h_2(p_1, p_2, w_2)(s)}{|w_2'(t)|} ds < 2. \qquad (4)$$

Then problem (1), (2) *has a unique solution.*

Note that the strict inequality (4) in Theorem 1 is unimprovable and it cannot be replaced by the nonstrict one.

Corollary 1. *Let conditions* (3) *hold and there exist* $t_0 \in]a, b[$ *such that*

$$\int\limits_a^{t_0} \big((t-a)[p_1(t)]_- + [p_2(t)]_+\big)dt \le 1, \;\; \int\limits_{t_0}^{b} \big((b-t)[p_1(t)]_- + [p_2(t)]_+\big)dt \le 1. \qquad (5)$$

Then problem (1), (2) *has a unique solution.*

Corollary 2. *Let conditions* (3) *hold and there exist nonnegative constants* ℓ_i $(i = 1, 2)$ *such that*

$$p_1(t) \ge -\ell_1, \;\; p_2(t)\,\mathrm{sgn}(2t - a - b) \le \ell_2 \;\; \text{for} \;\; a < t < b,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\ell_1 + \ell_2 x + x^2} < (b - a)/2. \qquad (6)$$

Then problem (1), (2) *has a unique solution.*

In the right-hand sides of inequalities (5) in Corollary 1, the number 1 cannot be replaced by $1 + \varepsilon$ no matter how small $\varepsilon > 0$ is, and the strict inequality (6) in Corollary 2 cannot be replaced by the nonstrict one.

A. Razmadze Mathematical Institute of Tbilisi State University, Georgia.
Email: nino.partsvania@tsu.ge

IMPROVED APPROXIMATIONS FOR RESOLVENTS OF ELLIPTIC OPERATORS IN THE ENERGY OPERATOR NORM

PASTUKHOVA S.E.

In the space $\mathbb{R}^d$, $d{\geq}2$, we consider divergence-type operators of an even order $2m{\geq}2$

$$A_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (a^\varepsilon_{\alpha\beta}(x) D^\beta)$$

with ε-periodic coefficients $a^\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}(y)|_{y=\varepsilon^{-1}x}$, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. Here, $\alpha{=}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ is a multiindex of length $|\alpha|{=}\alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\alpha_j{\in}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}$, $D_i = D_{x_i}$, $i = 1, \dots, d$; the coefficients $a_{\alpha\beta}(y)$ are real, measurable, 1-periodic with periodicity cell $Y{=}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$, and satisfy the conditions

$$\begin{gathered} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(Y)} \leq \lambda_1, \quad \forall \alpha,\, \beta,\, |\alpha| = |\beta| = m, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta \varphi D^\alpha \varphi \, dx \geq \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \varphi|^2 \, dx \end{gathered} \tag{1}$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ with some positive constants λ_0 and λ_1.

With the family A_ε we associate the homogenized operator

$$\hat{A} = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta, \tag{2}$$

which is of the same class (1). The coefficients $\hat{a}_{\alpha\beta}$ are constant and are expressed via solutions to so-called cell problems. It is known [1] that

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (\hat{A} + 1)^{-1} - \varepsilon^m \mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to H^m(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon, \tag{3}$$

where the constant C depends only on the dimension d and the constants λ_0 and λ_1 in (1). The correcting operator $\mathcal{K}_\varepsilon$ is obtained by using the solutions to the cell problems introduced to compute the coefficients $\hat{a}_{\alpha\beta}$.

Now we seek ε^2-order approximations of the resolvent $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ in the energy operator norm $\|\cdot\|_{L^2 \to H^m}$. To this end, we introduce the homogenized operator, slightly different from that in (2); namely,

$$\hat{A}_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha \Big(\sum_{|\beta|=m} \hat{a}_{\alpha\beta} D^\beta + \varepsilon \sum_{|\delta|=m+1} b_{\alpha\delta} D^\delta \Big).$$

Here, the coefficients $\hat{a}_{\alpha\beta}$ are the same as in (2) and $b_{\alpha\delta}$ are constants defined via solutions to the additional cell problems. We define the correcting operators

$$\mathcal{K}_m(\varepsilon) {=} \sum_{|\gamma|=m} N_\gamma(\frac{x}{\varepsilon}) D^\gamma S^\varepsilon (\hat{A}_\varepsilon {+} 1)^{-1}$$

and

$$\mathcal{K}_{m+1}(\varepsilon)=\sum_{|\delta|=m+1} N_\delta(\frac{x}{\varepsilon})D^\delta S^\varepsilon S^\varepsilon(\hat{A}_\varepsilon+1)^{-1},$$

where N_γ, $|\gamma|=m$, and N_δ, $|\delta|=m+1$, are the solutions to the above-mentioned cell problems, S^ε is the Steklov smoothing operator defined as $(S^\varepsilon\varphi)(x)=\int_Y \varphi(x-\varepsilon\omega)\,d\omega$. In [2], the following estimate is proved:

$$\|(\hat{A}_\varepsilon+1)^{-1}+\varepsilon^m\mathcal{K}_m(\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\mathcal{K}_{m+1}(\varepsilon)-(A_\varepsilon+1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^m(\mathbb{R}^d)}\le C\varepsilon^2,$$

where the constant C is of the same type as in (3).

References

[1] Pastukhova S. E. *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators.* Applicable Analysis. 2016. V. 95.

[2] Pastukhova S. E. *Improved approximations of resolvent in homogenization of higher order operators.* J. Math. Sciences. 2021. V. 259.

Russian Technological University - MIREA, Moscow, Russia.
Email: pas-se@yandex.ru

ON VARIATIONAL APPROACH IN HOMOGENIZATION OF CONVOLUTION TYPE OPERATORS

PIATNITSKI A.L.

We consider a symmetric operator of the form

$$A^\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^{d+2}}\int_{\mathbb{R}^d} a\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Lambda\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon}\Big)(u(y,t)-u(x,t))\,dy \tag{1}$$

with a small parameter $\varepsilon>0$ and the corresponding quadratic functional

$$F^\varepsilon(u)=\frac{1}{\varepsilon^{d+2}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} a\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Lambda\Big(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon}\Big)(u(y,t)-u(x,t))^2\,dydx.$$

The talk will focus on Γ-convergence results for functional F^ε, as $\varepsilon\to 0$.

We assume that the coefficients $a(z)$ and $\Lambda(\xi,\eta)$ possess the following properties: integrability

$$a(\cdot)\geqslant 0,\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(z)\,dz=1,\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d}|z|^2 a(z)\,dz<\infty; \tag{2}$$

"ellipticity"

$$0<\Lambda^-\leqslant\Lambda(\xi,\eta)\leqslant\Lambda^+ \tag{3}$$

for some positive constants Λ^- and Λ^+. symmetry

$$a(-z)=a(z)\text{ for all }z\in\mathbb{R}^d,\quad \Lambda(\xi,\eta)=\Lambda)(\eta,\xi)\text{ for all }\xi,\,\eta. \tag{4}$$

We also assume that either $\Lambda(\xi,\eta)$ is periodic both in ξ and η, or $\Lambda(\xi,\eta)$ is random statistically homogeneous ergodic random field.

In the periodic case the following result holds:

Theorem 1. *Let $\Lambda(\xi,\eta)$ be periodic in ξ and η, and assume that conditions (2)–(4) are fulfilled. Then, as $\varepsilon \to 0$, the family F^ε Γ-converges in $L^2(\mathbb{R}^d)$ equipped with a weak topology to the functional F^0 defined by*

$$F^0(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \hat{a}\nabla u \cdot \nabla u \, dx, & \text{if } u \in H^1(\mathbb{R}^d), \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\hat{a}$ is a symmetric positive definite constant $d \times d$ matrix.

Similar result holds in the random case.

Theorem 2. *Let $\Lambda(\xi,\eta)$ be random statistically homogeneous ergodic random field in $\mathbb{R}^{2d}$, and assume that conditions (2)–(4) are fulfilled. Then almost surely the family F^ε Γ-converges in $L^2(\mathbb{R}^d)$ equipped with a weak topology to the functional F^0 defined in Theorem 1 with a constant deterministic positive definite matrix $\hat{a}$.*

This is a joint work with Andrea Braides (Rome).

References

[1] Braides, A.; Piatnitski, A. Homogenization of random convolution energies. *J. London Math. Soc.*, **104**(2), 295–319 (2021).

IITP RAS, Russia and the Arctic University of Norway.
Email: apiatnitski@gmail.com

OSCILLATION CRITERIA FOR THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NEUTRAL COEFFICIENTS

PINELAS S.

In this work it is introduce a criteria to the oscillatory behavior of solutions to a class of third-order differential equations with neutral coefficients. Sufficient conditions for all solutions to be oscillatory are given and some examples to illustrate the main results.

References

[1] Baculíkov B., Dzurina J., *On certain inequalities and their applications in the oscillation theory*, Adv. Differ. Equ. 2013, Article ID 165, 1–8.

[2] Chatzarakis G. E., Grace S. R., Jadlovská I., Li T., Tunç E., *Oscillation criteria for third-order Emden-Fowler differential equations with unbounded neutral coefficients*, Complexity 2019, Article ID 5691758, 1–7.

[3] Doslá Z., Liska P., *Comparison theorems for third-order neutral differential equations*, Electron. J. Differential Equations 2016, No. 38, 1–13.

[4] Graef J. R., Savithri R., Thandapani E., *Oscillatory properties of third order neutral delay differential equations*, Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, May 24–27, 2002, Wilmington, NC, USA, 342–350.

Academia Militar, Portugal. Email: sandra.pinelas@gmail.com

THE KALTON AND ROSENTHAL TYPE DECOMPOSITION OF ORTHOGONALLY ADDITIVE OPERATORS

PLIEV M.A.

Narrow operators on symmetric function spaces, as introduced in [1], may be thought of as a generalization of compact operators. There is a deep connection between the theory of narrow operators and classical results of Kalton [3], Rosenthal [5], concerning decompositions of continuous linear operators on $\mathcal{L}(L_1)$. The next theorem can be regarded as a generalization of [3, 5] to the setting of dominated orthogonally additive operators (OAOs) on lattice-normed spaces (LNSs).

All necessary information on LNSs and dominated OAOs the reader can find in [2, 4].

Theorem 1. *Let $(\mathcal{X}, E)$ be a decomposable lattice-normed space, where E is a vector lattice with the principal projection property, F be an order continuous Banach lattice and $T\colon \mathcal{X} \to F$ be a dominated orthogonally additive operator. There then exists a unique decomposition*

$$T = T_{\mathcal{N}} + T_{\mathcal{H}}$$

where $T_{\mathcal{N}}$ is a narrow operator and $T_{\mathcal{H}}$ is an atomic operator.

The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education (the agreement numbers is 075-02-2021-1844).

References

[1] Plichko A., M.Popov M. *Symmetric function spaces on atomless probability spaces,* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **306** (1990), 1–85.

[2] N. Abasov, M. Pliev, *Dominated orthogonally additive operators in lattice-normed spaces*, Adv. Oper. Theory, **4** (2019), 3, 251–264.
[3] N. J. Kalton, *The endomorphisms of* L_p $(0 \le p \le 1)$, Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), 3, 353–381.
[4] A. G. Kusraev, *Dominated Operators*, Kluwer Academic Publishers, (2000).
[5] H. P. Rosenthal, *Embeddings of* L^1 *in* L^1, Contemp. Math., **26** (1984), 335–349.

Southern Mathematical Institute of RAS, Vladikavkaz, Russia.
Email: plimarat@yandex.ru

SURFACES IN $\mathbb{R}^3$ AND THEIR CONTACT WITH CIRCLES

REEVE G.

It has long been known that we can use the contact between a surface and so called model submanifolds to tell us about the underlying geometry of the surface. For example, we can tell something about how flat a surface is by its contact with either planes or lines, and something about how round it is by its contact with spheres or circles. In this talk I'll revisit the idea of contact between a surface and circles and introduce the concept of a "surface of centres"of circles with sufficiently high contact, a kind of generalisation to the focal set. This is joint work with Peter Giblin.

Liverpool Hope University, UK. Email: reeveg@hope.ac.uk

DECOUPLING OF QUASILINEAR DYNAMIC SYSTEMS ON TIME SCALES

REINFELDS A.

Let $\mathbb{T}$ be unbounded above and unbounded below time scales $\mathbb{T}$ [1]. We consider the rd-continuous on $t \in \mathbb{T}$ dynamic system

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^{\Delta} & = & A(t)x + f(t,x,y), \\ y^{\Delta} & = & B(t)y + g(t,x,y), \end{array} \right. \tag{1}$$

in a Banach space, where nonlinear terms are ε-Lipschitz and the system (1) has a trivial solution. Let $X(t,\tau)$ and $Y(t,\tau)$ be the transition operators of the corresponding linear system

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^{\Delta} & = & A(t)x, \\ y^{\Delta} & = & B(t)y. \end{array} \right. \tag{2}$$

Suppose that the system (2) satisfy the conditions of integral separation

$$\nu = \max\left(\sup_s \int_{-\infty}^{s} |Y(s,\sigma(t))||X(t,s)|\,\Delta t\,, \right.$$

$$\sup_s \int_s^{+\infty} |X(s,\sigma(t))||Y(t,s)|\,\Delta t\Big) < +\infty$$

with the *separation constant* ν. Based on the integral version of the idea developed in the article [2] we generalize [3].

Theorem 1. *Let* $4\varepsilon\nu < 1$ *and the linear system* (2) *is regressive. Then the dynamical systems* (1) *and*

$$\begin{cases} x^{\Delta} &= A(t)x + f(t,x,u(t,x)), \\ y^{\Delta} &= B(t)y + g(t,v(t,y),y). \end{cases} \tag{3}$$

on time scales are global dynamic equivalent.

In the case of unbounded above time scales we also find sufficient condition under which the system (1) is dynamic equivalent to system (4).

Theorem 2. *Let* $4\varepsilon\nu < 1$ *and the linear system*

$$x^{\Delta} = A(t)x$$

is regressive. Then the dynamical systems (1) *and*

$$\begin{cases} x^{\Delta} &= A(t)x + f(t,x,u(t,x)), \\ y^{\Delta} &= B(t)y + g(t,k(t,x,y),y). \end{cases} \tag{4}$$

on time scales are global dynamic equivalent for $t \geq \tau$.

References

[1] M. Bohner M., A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications,* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2001.

[2] A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete and semidynamical systems in metric spaces*, Z. Angew. Mat. Phys. **45**(6) (1994), 933–955.

[3] S. Hilger, *Generalized theorem of Hartman-Grobman on measure chains*, J. Austral. Math. Soc. Ser A, **60**(2) (1996), 157–191.

Institute of mathematics and computer science & University of Latvia, Latvia. Email: reinf@latnet.lv

AN ADDITION TO A NEW APPROACH TO NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

RONTÓ M.[1], RONTÓ A.[2]

We study the non-linear boundary value problem of general form

$$u'(t) = f(t,u(t)),\ t \in [a,b]\,; \quad \Phi(u) = d, \tag{1}$$

where $\Phi : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ is a vector functional (possibly non-linear), d is a given vector, and $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$ is a continuous function satisfying the Lipschitz condition in a bounded closed domain D,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K\,|x-y|\,, \text{ for all } \{x,y\} \subset D,\ t \in [a,b]\,. \tag{2}$$

We are interested in establishing the solvability of (1) and approximate finding its solution. An approach to this was suggested in [1], which involves a kind of reduction to a parametrized family of problems

$$u'(t) = f(t,u(t)),\ t \in [a,b]\,; \qquad u(a) = z, \quad u(b) = \eta, \tag{3}$$

where $z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_n)$, $\eta = \operatorname{col}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ are unknown parameters. Assumption 1. There is a non-negative ρ such that, componentwise,

$$\rho \geq \frac{1}{2}\,(b-a)\,\delta_{[a,b],D}(f),$$

where $\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2}\big(\max_{(t,u)\in[a,b]\times D} f(t,u) - \min_{(t,u)\in[a,b]\times D}(t,u)\big)$.

Assumption 2. $r(Q) < 1$ for the spectral radius of $Q = \frac{3(b-a)}{10}K$.

The techniques are based on properties of the iteration sequence

$$u_{m+1}(t,z,\eta) = u_0(t,z,\eta) + \int_a^t f(s, u_m(s,z,\eta))\,ds \\ - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b f(s, u_m(s,z,\eta))\,ds, \tag{4}$$

where $u_0(t,z,\eta) = \big(1 - \frac{t-a}{b-a}\big)z + \frac{t-a}{b-a}\eta$, $t \in [a,b]$, $m = 0,1,2,\ldots$. These formulas are used to compute the corresponding functions explicitly for certain values of m which, under additional conditions, allows one to prove the solvability of the problem and construct approximate solutions. If the function involves transcendental non-linearities with respect to the second variable, the correspondent explicit computations, in the general case, cannot be carried out due to the impossibility to find the exact values of the corresponding integrals. One of the ways to overcome this difficilty is to use, instead of (4), the polynomial approximations

$$v_m^q(t,\xi,\eta) := u_0(t,\xi,\eta) + \int_a^t L_q(Nv_{m-1}(\cdot,\xi,\eta))ds \\ - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b L_q(Nv_{m-1}(\cdot,\xi,\eta))ds,\ t \in [a,b],\ m = 1,2,\ldots,$$

where $v_0^q(t,\xi,\eta) = u_0(t,\xi,\eta)$. Here, we need to construct the qth order Lagrange interpolation polynomials $L_q(Nv_{m-1}(\cdot,\xi,\eta))$ over the $q+1$ Chebyshev nodes for functions obtained as a result of application of the Nemytskii operator N, $(Ny)(t) := f(t, y(t))$, $t \in [a,b]$, $y \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

To relax the conditions involved in Assumptions 1 and 2, following [2], we use the interval division $t_0 = a$, $t_k = t_{k-1} + h_k$, $k = 1, \ldots, M-1$, $t_M = b$, and instead of (3), consider M model problems

$$\frac{du^{(k)}}{dt} = f\big(t, u^{(k)}\big),\ t \in [t_{k-1}, t_k]\,;\quad u(t_{k-1}) = z^{(k-1)},\ u\,(t_k) = z^{(k)},$$

where $k = 1, 2, \ldots, M$ and $z^{(0)}$, $z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}$ are to be determined. Each of these problems is studied on an interval of length h_k. Assumption 1 is then replaced by $r(Q_k) < 1$, $k = 1, 2, \ldots, M$, where $Q_k = \frac{3h_k}{10} K_k$ and K_k is the Lipschitz matrix for f on $[t_{k-1}, t_k] \times D^{[k]}$, $D^{[k]} \subset D$. Assumption 2 is likewise weakened. The approach is illustrated on examples.

References

[1] Rontó A., Rontó M. and Varha J., A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems, *Appl. Math. Comput.* (2015), **250**, 689–700.

[2] Rontó A., Rontó M. and Shchobak N. Notes on interval halving procedure for periodic and two-point problems. *Bound. Value Probl.* 2014, 164 (2014), 1–20.

[1]University of Miskolc, Hungary. Email: matronto@uni-miskolc.hu

[2]Brno University of Technology, Czech Republic.
Email: andras.ronto@vutbr.cz

THE RESOLUTION OF SINGULARITY IN THE NEIGHBORHOOD OF A SECOND ORDER SINGULAR EXTREMAL IN TWO-INPUT CONTROL PROBLEMS

RONZHINA M.I.[1], MANITA L.A.[2], LOKUTSIEVSKIY L.V.[3]

Pontryagin's maximum principle (PMP) reduces the study of optimal control problems to the study of controlled Hamiltonian systems. If the Hamiltonian system is affine in control, then the typical phenomenon is the existence of a singular trajectory that is characterized by the fact that the Hamiltonian reaches its maximum over a finite time interval at more than one point. In other words, the optimal control can not be determined directly from the PMP maximum condition. A class of problems that appear in many applications is the ones with singular trajectories of the second order.

The behavior of optimal trajectories near a singular trajectory of the second order can be quite complex, e.g. nonsingular trajectories can have infinite number of control discontinuities near the matching point with the singular arc (this is called the chattering regime, or Fuller's phenomenon). In problems with one-dimensional control, it was proved that optimal chattering trajectories are typical for controlled systems with singular trajectories of the second order [1, 2].

In the case of one-dimensional control, the problems with singular trajectories of the second order are well studied. A complete description of the structure of optimal solutions in a neighborhood of singular extremals of the second order was given by [2]. In problems with multidimensional control the behavior near a singular trajectory can be much more complex and has been studied only in a few special cases.

The main tool of studying the behavior of nonsingular extremals in a small neighborhood of a singular extremal is the resolution of singularity. The method consists in a geometric transformation that replaces a singular point with a surface of higher dimension.

In the series of papers [3, 4, 5] we have implemented the resolution of singularity in a neighborhood of a second order singular extremal for problems with two-dimensional control. We consider a Hamiltonian system that is affine in two-dimensional bounded control taking values in an ellipse. In a neighborhood of a singular extremal of the second order, we obtain a family of solutions in the form of logarithmic spirals that reach the singular point in a finite time and have a countable number of revolutions around it.

This work is partially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-11-20169).

References

[1] *Kupka I.* The ubiquity of Fuller's phenomenon. Nonlinear controllability and optimal control, 133: 313–350, 1990.

[2] *Zelikin M. I., Borisov V. F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering (Birkhäuser, Boston, 1994).

[3] Manita L. A., Ronzhina M. I., *Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems – B (Online First), 2021, doi: 10.3934/dcdsb.2021187.

[4] Ronzhina M. I., Manita L. A., Lokutsievskii L. V. *Solutions of a Hamiltonian system with two-dimensional control in the neighborhood of a singular extremal of the second order* Uspekhi Mat. Nauk, V. 76, N. 6, 2021, 201–202.

[5] Ronzhina M. I., Manita L. A., Lokutsievskii L. V. *Neighborhood of the second order singular mode in a problem with control in a circle.* Trudy Mat. Inst. Steklova, V. 315, 2021, 222–236.

[1]National University of Oil and Gas B«Gubkin UniversityB», Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
Email: ronzhina.m@gubkin.ru

[2]NRU Higher School of Economics, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. Email: lmanita@hse.ru

[3]Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. Email: lion.lokut@gmail.com

ASYMPTOTIC MODELLING OF SOFT AND STIFF INTERFACES IN KIRCHHOFF-LOVE'S PLATES THEORY

RUDOY E.M.

The characterization of the interface conditions between bonded together elastic media is a classical problem in solids mechanics. This problem arises in many fields of engineering when composite material should be modelled. For example, laminate structures can be built by gluing together thin plates. Due to the small thickness of glue layer (or adhesive) the numerical computation of the solution of the corresponding boundary value problem can be very difficult because it requires a fine mesh and, consequently, increasing of degree of freedom of the corresponding system.

In this situation, instead of the full model the approximate model with the interface condition between adherents is introduced. Many interface conditions are currently studied rather well from both mathematical and mechanical point of view for different models of solids mechanics: linear and nonlinear elasticity, piezoelectricity, magneto-electro-thermo-elasticity [1, 2, 3, 4, 5].

In the present work, we consider a composite structure consisting of two plates glued together by a third one (adhesive layer) along some common interfaces. The structure is in equilibrium under the action of applied forces. The composite plate is fixed on the parts of the external boundary. The equilibrium problem (case of pure bending) is formulated as a variational one. Namely, a minimization of the energy functional over a set of admissible deflections of the composite plate in the space H^2. It means that the deflections of each plates are described by biharmonic equations. And on the common boundaries the condition of equality of the deflections and their normal derivatives is satisfied. It is assumed that the elastic properties of the adhesive layer depend on its thickness ε as ε^N, $N \in \mathbb{R}$. Parameter ε is a small parameter of the problem. But the elastic properties of the glued plates do not depend on ε and remain constant.

The main goal of the work is to strictly mathematically justify the passage to the limit when ε tends to zero. It is shown that there are 7 limit problems in dependence on N. Moreover, for these 7 problems it is shown that the influence of adhesive on adherents can be replaced by interface [6].

The research was supported by RFBR grant 18-29-10007.

References

[1] Dumont S., Rizzoni R., Lebon F., Sacco E., *Soft and hard interface models for bonded elements*, Composites Part B: Engineering. 2018. V. 153. P. 480–490.

[2] Geymonat G., Krasucki F., Lenci S., *Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive*, Mathematics and Mechanics of Solids. 1999. V. 4. P. 201–225.

[3] Lebon F., Rizzoni R., *Asymptotic behavior of a hard thin linear elastic interphase: An energy approach*, International Journal of Solids and Structures. 2011. V. 48. P. 441–449.

[4] Rudoy E.M., Kazarinov N.A., Slesarenko V.Yu., *Numerical simulation of equilibrium of an elastic two-layer structure with a through crack*, Numer. Analys. Appl. 2017. V. 10. P. 63–73.

[5] Furtsev A., Itou H., Rudoy E. , *Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation*, International Journal of Solids and Structures. 2020. V. 182-183. P. 100–111.

[6] Furtsev A., Rudoy E. , *Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff-Love theory of plates*, International Journal of Solids and Structures. 2020. V. 202. P. 562-574.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russia.
Email: rem@hydro.nsc.ru

ON A PROBLEM GOVERNED BY SUBDIFFERENTIALS AND CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVES

SAÏDI SOUMIA

Differential equations of fractional order have recently been proved valuable tools in modeling many phenomena in various fields of science and engineering. There are many applications to problems in viscoelasticity, electro-chemistry, control, porous media, electromagnetics, etc. There has been a significant theoretical development in fractional differential equations in recent years, see for instance [1], [2], and the references therein. In particular, the existence of solutions of boundary value problems and boundary conditions for implicit fractional differential equations and integral equations with fractional derivatives constitutes an attractive subject of research.

We study here a dynamical system involving a differential inclusion governed by subdifferential operators and a differential equation with Caputo fractional derivatives [3]. To establish our main theorem, we combine the necessary results of fractional calculus and an existence (and uniqueness) theorem concerning first-order evolution problems with single-valued perturbations [4].

References

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Math. Stud. 204, North Holland, 2006.

[2] Podlubny I., *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego (1999).

[3] Saïdi S., *Some results associated to first-order set-valued evolution problems with subdifferentials*, J. Nonlinear Var. Anal. 5 (2) (2021), 227-250.

[4] Saïdi S., Thibault L. and Yarou M., *Relaxation of optimal control problems involving time dependent subdifferential operators*, Numer. Funct. Anal. Optim., 34 (10) (2013), 1156-1186.

LMPA Laboratory, Department of Mathematics, Mohammed Seddik Ben Yahia University, Jijel-Algeria. Email: soumiasaidi44@gmail.com

SUB-RIEMANNIAN GEOMETRY AND BICYCLE MATHEMATICS ON THE GROUP OF MOTIONS OF THE PLANE

SACHKOV YU.L.

We will discuss the unique, up to local isometries, contact sub-Riemannian structure on the group SE(2) of proper motions of the plane (also known as the group of rototranslations).

The following questions will be addressed:

- geodesics,
- their local and global optimality,
- cut time, cut locus, and spheres,
- infinite geodesics,
- bicycle model,
- bicycle transform and relation of geodesics with Euler elasticae,
- group of isometries and homogeneous geodesics,
- applications to imaging and robotics.

The research was supported by RSF grant 17-11-01387-P.

References

[1] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399, available at arXiv:0807.4731 [math.OC].

[2] Yu. L. Sachkov, Conjugate and cut time in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039, available at arXiv:0903.0727 [math.OC].

[3] Yu. L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321

[4] A. Ardentov, G. Bor, E. Le Donne, R. Montgomery, Yu. Sachkov, Bicycle paths, elasticae and sub-Riemannian geometry, *Nonlinearity*, 34 (2021) 4661–4683

[5] Yu. L. Sachkov, Homogeneous sub-Riemannian geodesics on the group of motions of the plane, *Differential equations*, 2021, Vol. 57, No. 11, pp. 1568–1572

Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia.
Email: yusachkov@gmail.com

ON MATHEMATICAL MODELS OF EVOLVING NETWORKS

SADYRBAEV F.[1], SAMUILIK I.[2], SILVANS A.[3]

We study systems of ordinary differential equations (ODE), which model the interrelation and evolution of large networks. We mean gene regulatory networks (GRN), neuronal networks and telecommunication networks. They can contain an arbitrary number of elements, which are interpreted as genes in the case of GRN. These systems contain multiple parameters. The interrelation between the elements of a network is described by the so called regulatory matrix W, that is a square matrix with constant coefficients. The state of a network is associated with the solution vector $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, where t is interpreted as time. Evolution of a network can be described by studying the behavior of solutions of the associated system of ODE. The main factor, defining the evolution in a model, is the set of possible attractors in phase space. One can find non-trivial attractors in these systems, and they vary in nature.

Both analytical and computational means are used in the study of a system. The study of stable equilibria can be made using the standard analysis of critical points. The geometry of the vector fields can be investigated using the method of nullclines, this works well in low dimensional cases. The computational approach is productive, however the usual restrictions on capability of devices arise.

In our talk we try to mention the typical issues that arise in qualitative study. The main problem is to treat systems of high dimensionality, where we encounter issues with visualisation and processing limitations.

Nevertheless, the amount of relevant results increases, and some suggestions for behavior of the state vector $X(t)$ can be made even for relatively high-dimensional cases.

References

[1] H. de Jong. Modeling and Simulation of Genetic Regulatory Systems: A Literature Review, J. Comput Biol. 2002;9(1):67-103, DOI: 10.1089/10665270252833208

[2] Y. Koizumi et al. Adaptive Virtual Network Topology Control Based on Attractor Selection. Journal of Lightwave Technology (ISSN : 0733-8724), Vol.28 (06/2010), Issue 11, pp. 1720 - 1731 DOI:10.1109/JLT.2010.2048412

[3] Le-Zhi Wang, Ri-Qi Su, Zi-Gang Huang, Xiao Wang, Wen-Xu Wang, Celso Grebogi and Ying-Cheng Lai, A geometrical approach to control and controllability of nonlinear dynamical networks. Nature Communications, Volume 7, Article number: 11323 (2016), DOI: 10.1038/ncomms11323

[4] Sadyrbaev F.Zh., Atslega S.A., Samuilik I.V. On controllability in models of biological networks. Collection of works of the VIII International Conference on Science and Technology (Belgorod, 24-25 September, 2020), 411-413.

[5] F. Sadyrbaev, V. Sengileyev, A. Silvans. Attractors in a three-dimensional genetic network. Proceedings book of "4th international Health Sciences and Innovation congress July 5-6, 2021, Baku/Azerbaijan, 379-385.

[1]Daugavpils University, Latvia. Email: felix@latnet.lv

[2]Daugavpils University, Latvia. Email: Inna.Samuilika@rtu.lv

[3]Student at Groningen University, Netherlands.
Email: albert.silvans@gmail.com

DYNAMICS OF LOCALIZED WAVES WITH CONTROLLABLE NONLINEARITIES

SAKKARAVARTHI K[1], KANNA T[2]

The objective of the present work is to investigate the consequences of varying nonlinearities in the dynamics of localized waves propagating through inhomogeneous media. For this purpose, we consider a coupled nonlinear Schrödinger equation consisting of temporally varying self-phase & cross-phase modulations and four-wave mixing nonlinearities governing multimode beam propagation in inhomogeneous fiber. The corresponding mathematical model is described as

$$i\frac{\partial A_j}{\partial z} + \left(\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(z,x)\right)A_j + \gamma(z)\left(\sigma_{jj}\left|A_j\right|^2 + \sum_{\ell}^{M}\sigma_{j\ell}\left|A_\ell\right|^2\right)A_j$$
$$-\gamma(z)\left(\sum_{\ell}^{M}\sigma_\ell A_\ell^2\right)A_j^* = 0, \quad j = 1,2,3,\cdots,M, \tag{1}$$

where $A_j(z,x)$: jth optical mode, δ: second-order dispersion, σ_{jj}: self-phase modulation, $\sigma_{j\ell}$: cross-phase modulation, σ_ℓ: four-wave mixing, $V(z,x)$: graded refractive index profile, and $\gamma(z)$: temporally-varying nonlinearity. We investigate the importance of such modulated nonlinearities in the dynamics of optical bright solitons, spatially or temporally periodic (Akhmediev or Ma) breathers, and doubly localized bright-dark rogue waves with the help of explicit analytical solutions constructed through a dedicated similarity transformation. We explore the possibility of controlling these solitons, rogue waves and breathers possessing different characteristics. Especially, we provide a demonstration for three types of inhomogeneities that shows snaking or creeping, tunnelling through a localized barrier/well, and amplification driven by compression type modulations with physically interesting changes in their dynamical characteristics. An important advantage of our study is that the methodology can be extended to multicomponent systems in a straightforward manner.

The results discussed in this work will be beneficial to the theoretical studies and experimental realization in engineering and controlling mechanism of different waves. Particularly, the wave propagation in graded refractive index (GRIN) media can attract interest toward further exploration in the context of atomic soliton/breather/rogue wave management in binary and spinor condensates, periodic lattice arrays, magnetic materials with layered structure, and so on. Furthermore, the influence of such modulations in higher-dimensional nonlinear optical systems featuring vortex solitons, optical bullets, resonant solitons, lumps and dromions will be immediate future interest.

The research work of K. Sakkaravarthi was supported by the Korean Ministry of Education, Science and Technology through APCTP Young Scientist Training (YST) Program.

References

[1] Y.S. Kivshar and G.P. Agrawal, Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, Academic Press, San Diego (2003).
[2] Q.H. Park and H. J. Shin, Phys. Rev. E 59 (1999) 2373.
[3] T. Kanna and K. Sakkaravarthi, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 285211.
[4] T. Kanna, M. Vijayajayanthi and M. Lakshmanan, J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 434018.
[5] K. Sakkaravarthi and T. Kanna, J. Math. Phys. 54 (2013) 013701.
[6] K. Sakkaravarthi, R. Babu Mareeswaran and T. Kanna, Physica Scripta 95 (2020) 095202.
[7] R. Babu Mareeswaran, K. Sakkaravarthi and T Kanna, J. Phys. A: Math. Theor. 53 (2020) 415701.

[1]Young Scientist Training Program, Asia-Pacific Center for Theoretical Physics (APCTP), POSTECH Campus, Pohang-37673, Republic of Korea.
Email: ksakkaravarthi@gmail.com

[2]Nonlinear Waves Research Laboratory, PG and Research Department of Physics, Bishop Heber College (Autonomous), Tiruchirapalli-620017, Tamil Nadu, India. Email: kanna_phy@gmail.com

BOUNDARY OPTIMAL CONTROL AND HOMOGENIZATION: CRITICAL CASE

SHAPOSHNIKOVA T.A.

We consider the homogenization of an optimal control problem in which the control v is placed on the part Γ_0 of the boundary and the spatial domain contains a thin layer of "small particles very close to the controlling boundary, and a Robin boundary condition is assumed on the boundary of those "small particles". We assume that the size of the particles and parameters involved in the Robin boundary condition are critical (and so they justify the occurrence of some "strange terms"in the homogenized problem and in the limit of the cost functional).

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \{x_n = 0\}$ is the $(n-1)$-dimensional domain on the plane $x_n = 0$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_0}$. We set $j = (j_1, \dots j_{n-1}, 0)$, $j_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots n-1$ and $G^j_\varepsilon = a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j$, where G_0 is the unit ball with the center $(0, \dots, 0, 1/2)$ and $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^\alpha$ with $\alpha = (n-1)/(n-2)$, $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : j = (j_1, \dots, j_{n-1}, 0), \overline{G^j_\varepsilon} \subset \Omega\}$. Next, we introduce sets

$$G_\varepsilon = \cup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} G^j_\varepsilon,\ S_\varepsilon = \cup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \partial G^j_\varepsilon,\ \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon},\ \partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

For an arbitrary function $v \in L^2(\Gamma_0)$, we denote by $u_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1)$ the solution of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(v) = f, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(v) + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon(v) = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon(v) = v, & x \in \Gamma_0, \\ u_\varepsilon(v) = 0, & x \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (1)$$

where $f \in L^2(\Omega)$, $a(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a(x) \geq a_0 = const > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\partial_\nu g$ is the partial derivative along the outward unit normal vector ν to the boundary. Consider the cost functional $J_\varepsilon : L^2(\Gamma_0) \to \mathbb{R}$,

$$J_\varepsilon(v) = \frac{\eta}{2} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} B(x)\nabla(u_\varepsilon(v) - u_T)\nabla(u_\varepsilon(v) - u_T)dx + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)},$$

where $B(x) = (b_{ij}(x))$ is an $n \times n$ positive symmetric matrix, $b_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ and $u_T \in H^0_1(\Omega)$ is the target function, η, N are arbitrary positive constants. It is well known that there exists a unique element $v_\varepsilon \in L^2(\Gamma_0)$ such that

$J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \min\limits_{v \in 2(\Gamma_0)} J_\varepsilon(v)$. It is known that an optimal control $v_\varepsilon = -\frac{\eta}{N} P_\varepsilon$, where $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ is a weak solution of the coupled system

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \Delta P_\varepsilon = \operatorname{div}(B(x)\nabla(u_\varepsilon - u_T)), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ \partial_\nu P_\varepsilon - (B(x)\nabla(u_\varepsilon - u_T), \nu) + \varepsilon^{-\gamma} a(x) P_\varepsilon = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ \partial_\nu u_\varepsilon = -\frac{\eta}{N} P_\varepsilon, & x \in \Gamma_0, \\ \partial_\nu P_\varepsilon - (B(x)\nabla(u_\varepsilon - u_T), \nu) = 0, & x \in \Gamma_0, \\ u_\varepsilon = P_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_1. \end{cases} \tag{2}$$

Denoting by $\widetilde{u_\varepsilon}$ and $\widetilde{P_\varepsilon}$ the H^1-extensions of functions u_ε and P_ε to Ω, we have as $\varepsilon \to 0, \widetilde{u_\varepsilon} \rightharpoonup u_0,\ \widetilde{P_\varepsilon} \rightharpoonup P_0,$ weakly in $H^1(\Omega, \Gamma_1)$.

Theorem 1. *Let $n \geq 3$, $\alpha = \gamma = \frac{n-1}{n-2}$ and a pair $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ is a weak solution of the system (2). Then, the pair (u_0, P_0) is a solution of the system*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f,\ \Delta P_0 = \operatorname{div}(B\nabla(u_0 - u_T)), & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u_0 + \mathcal{A}_1 \frac{a(x)}{a(x)+C_n} u_0 = -\frac{\eta}{N} P_0, & x \in \Gamma_0, \\ \partial_\nu P_0 - (B(x)\nabla(u_0 - u_T), \nu) + \mathcal{A}_1 \frac{a(x)}{a(x)+C_n} P_0 - & \\ -\mathcal{A}_2 \frac{\operatorname{tr} B(x) a^2(x)}{(a(x)+C_n)^2} u_0 = 0, & x \in \Gamma_0, \\ u_0 = P_0 = 0, & x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

where $\mathrm{trB(x)} = \sum\limits_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{b_{jj}(x)}$, $\mathcal{A}_1 = (n-2) C_0^{n-2} \omega_n$, $\mathcal{A}_2 = \frac{\mathcal{A}_1}{n}$, $C_n = \frac{n-2}{C_0}$, ω_n *is the surface area of the unit sphere in* $\mathbb{R}^n$.

Lomonosov Moscow State University, Russia. Email: shaposh.tan@mail.ru

SOME NEW SOLUTIONS TO SEMILINEAR EQUATIONS IN $\mathbb{R}^n$ WITH FRACTIONAL LAPLACIAN

SHCHEGLOVA A.P.

Let $n \geq 2$, and let $s \in (0,1)$. Denote by $2_s^* = \dfrac{2n}{n-2s}$ the critical embedding exponent for the Sobolev–Slobodetskii space $H^s(\mathbb{R}^n)$. For $q \in (2, 2_s^*)$, we consider the equation

$$(-\Delta)^s u + u = |u|^{q-2} u \qquad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

where $(-\Delta)^s$ is the conventional fractional Laplacian in $\mathbb{R}^n$ defined for any $s > 0$ by the Fourier transform

$$(-\Delta)^s u := F^{-1}\left(|\xi|^{2s} F u(\xi)\right).$$

Semilinear equations driven by fractional Laplacian have been studied in a number of papers. We construct some new classes of solutions to the equation (1), which, apparently, were not considered earlier.

In [1], for the model equation

$$-\Delta u + u = u^3 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

a variational approach was suggested. It is based on the concentration-compactness principle by P.-L. Lions and on the reflections. This method, also applicable to the equations driven by p-Laplacian, allows to construct in a unified way the solutions with various symmetries which can also decay in some directions.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a convex polyhedron. For a positive sequence $R \to +\infty$, we define a family of expanding domains

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x/R \in \Omega\}$$

and consider the problem

$$(-\Delta)^s_{\Omega_R} u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{in} \quad \Omega_R, \tag{2}$$

where $(-\Delta)^s_{\Omega_R}$ stands for some fractional Laplacian in Ω_R, such as spectral fractional Dirichlet or Neumann Laplacian, etc.

Lemma 1. *There exists a least energy solution u of* (2)*, positive and smooth in Ω_R.*

Now we assume that the polyhedron Ω has the following property: the space $\mathbb{R}^n$ can be filled with its reflections, colored checkerwise. Then we can extend the function u to the function $\mathbf{u}$ in the whole space by reflections consistent with the boundary conditions of $(-\Delta)^s_{\Omega_R}$.

Theorem 1. *The function* $\mathbf{u}$ *is a solution of the equation* (1) *in* $\mathbb{R}^n$.

In this way, we construct solutions of the equation (1) with various symmetries. Among them, there are: positive and sign-changing periodic solutions with various periodic lattices, quasi-periodic complex-valued solutions, breather-type solutions. These classes of solutions, apparently, were not studied earlier. In the local case, similar solutions are considered in [1]. However, some of our solutions are new even for $s = 1$.

This talk is based on joint work with Alexander Nazarov, see [2]. A part of our results was announced in the short communication [3].

The research was supported by RFBR grant 20-01-00630.

References

[1] Lerman L.M., Naryshkin P.E., Nazarov A.I. Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method. Nonlin. Analysis, **190** (2020), paper N111590.

[2] Nazarov A.I., Shcheglova A.P. Solutions with various structures for semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ driven by fractional Laplacian. arXiv:2111.07301

[3] Nazarov A.I., Shcheglova A.P. New classes of solutions to semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ with fractional Laplacian. ZNS POMI, **508** (2021), 124–133 (Russian).

St.Petersburg Electotechnical University, Russia; St.Petersburg State University, Russia. Email: apshcheglova@etu.ru

CRITICAL TRAVELING WAVES

SHCHEPAKINA E.A.[1], SOBOLEV V.A.[2], ZHANG L.[3]

The paper deals with a special type of traveling waves. We call these traveling waves critical since they simulate critical phenomena. The specificity of critical traveling waves is that they profile is a duck–trajectory (or canard) [1]. Recall, that canards are trajectories of a singularly perturbed system which at first move along the stable slow invariant manifold and then continue for a while along the unstable slow invariant manifold [2, 3].

Canard traveling waves were considered first in [4] for a combustion model, where it was shown that they separate the waves of slow burnout and the explosion waves. Later, other papers on the canard traveling waves appeared, see, for example, [5, 6, 7, 8] and references therein.

It should ne noted that critical traveling waves are of different types depending on their profile which can be periodic, homoclinic, and heteroclinic. For heteroclinic profile, it is possible to distinguish the cases of point-to-cycle and point-to-point traveling waves.

In this paper, we demonstrate some types of critical traveling waves using the reaction–diffusion system. We consider processes characterized by small diffusion, which leads to the appearance of singular perturbations in the corresponding ODE systems. The use of the method of invariant manifolds of singularly perturbed systems allows us to reduce the traveling wave problem of the original PDE system to the analysis of their profiles in the ODE system with the lower order.

This work is partially supported by RFBR and NSFC according to the research project No. 20-51-53008 (E. Shchepakina and V. Sobolev), and NSFC projects No. 12011530062, No. 12172199 and No. 11672270 (L. Zhang).

References

[1] Benoit E., Callot J. L.,Diener F., Diener M., *Chasse au canard*, Collect. Math., vol. 31-32, pp. 37-119, 1981-1982.

[2] Shchepakina E., Sobolev V., *Black swans and canards in laser and combustion models*, in *Singular perturbation and hysteresis*, M. P. Mortell, R. E. O'Malley, A. Pokrovskii, and V. Sobolev, Eds. SIAM, Philadelphia 2005, pp 207–255.

[3] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M. P. *Singular perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications*, Lect. Notes Math. vol. 2114, Springer, Cham–Heidelber–New York–Dordrecht–London 2014.

[4] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V., *A new type of travelling wave*, Math. Method. Appl. Sci., vol. 26, pp. 1349–1361, 2003.

[5] De Maesschalck P., Popovič N., Kaper T. J., *Canards and bifurcation delays of spatially homogeneous and inhomogeneous types in reaction–diffusion equations*, Adv. Differential Equ., vol. 14, pp. 943–962, 2009.

[6] Harley K., *Canards in advection–reaction–diffusion systems in one spatial dimension*, PhD thesis, Queensland University of Technology, Queensland 2014.

[7] Avitabile D., Desroches M., Knobloch E., *Spatiotemporal canards in neural field equations*, Phys. Rev. E, vol. 95, 042205, 2017.

[8] Avitabile D., Desroches M., Knobloch E., Krupa M., *Ducks in space: from nonlinear absolute instability to noise-sustained structures in a pattern–forming system*, Proc. R. Soc. A, vol. 473(2207), 20170018, November 2017.

[1]Samara National Research University, Russia. Email: shchepakina@ssau.ru

[2]Samara National Research University, Russia. Email: v.sobolev@ssau.ru

[3]Shandong University of Science and Technology, China.
Email: li-jun0608@163.com

LARGE SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATE ABSORPTION TERM

SHISHKOV A.E.[1], YEVGENIEVA Y.A.[2]

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, be a bounded domain and $f(\cdot,\cdot)$ a nonnegative continuous function in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1$ such that $f(x,0) = 0\ \forall x \in \overline{\Omega}$. We consider the so-called large solutions of the equation

$$-\Delta u + f(x,u) = 0 \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

i.e. solutions $u(x)$ of (1), satisfying boundary condition

$$\lim_{d(x)\to 0} u(x) = \infty, \quad d(x) := dist(x, \partial\Omega). \tag{2}$$

When $f = f(u)$ is monotonic function, then the existence of large solution is associated with well known Keller–Osserman condition on the growth of $f(u)$ as $u \to \infty$. An adaptation of mentioned KO-condition to nonmonotonic $f(\cdot)$

was realized in the work of S. Dumont, L. Dupaigne, O. Goubet, V. Radulescu (2007), for general nonlinearities $f(x,u)$ — by J. Lopez-Gomez (2000) and many other authors. More difficult is problem of uniqueness of large solution. For smooth domain Ω and $f(u)=u^p$, $p=\frac{n+2}{n-2}$, $n>2$, uniqueness was firstly proved by C. Loewner, L. Nirenberg (1974), for general $f(u)=u^p$, $p>1$, mentioned uniqueness was proved by C. Bandle and M. Marcus (1992). As to $f(x,u)$, M. Marcus and L. Veron (2003) proved uniqueness of large solution for C^2–smooth bounded Ω if: $f(x,u)\geqslant c_0 d(x)^\alpha u^p$ $\forall\, x\in\Omega$, $\forall\, u\geqslant 0$, $p>1$, $\alpha>0$, $c_0=const>0$. At last in [1] authors hypothesized the uniqueness if the following condition holds:

$$f(x,u)\geqslant c_0\exp\left(-c_1 d(x)^{-\alpha}\right)u^p$$
$$\forall\, x\in\Omega,\ \forall\, u\geqslant 0,\ p>1,\ 0<\alpha<1,\ c_1>0.$$

We prove the validity of this hypothesis. Moreover, we prove even more general result.

Theorem [2]. *Let $f(x,u)\geqslant c_0 h_\omega(d(x))\,u^p$ $\forall\, x\in\Omega$, $p>1$, where $h_\omega(s)=\exp\left(-s^{-1}\omega(s)\right)$ and nondecreasing continuous function $\omega(\cdot)$ satisfies Dini condition:*

$$\int_0^c s^{-1}\omega(s)ds<\infty,\quad \forall\, c>0. \tag{3}$$

Then equation (1) *admit only one large solution.*

Problem: whether is condition (3) necessary condition for uniqueness of large solution?

As it was shown in [3] condition (3) is sufficient condition for existence of so-called very singular solution $u_a(x)$ of equation (1) with arbitrary $a\in\partial\Omega$, i.e. solution of (1), satisfying boundary condition $u_0(x)=0$ $\forall\, x\in\partial\Omega\setminus\{a\}$ with singularity in the point $\{a\}$ more strong than singularity of corresponding Poisson kernel. We proved (see [2]) that condition (3) is also necessary condition for existence of very singular solution $u_a(x)$ of (1) with arbitrary point $a\in\partial\Omega$.

The research of the first author is supported by RUDN University, Strategic Academic Leadership Program.

References

[1] J. Lopez-Gomez, L. Mair, L. Veron, General uniqueness results for large solutions. *Z. Angew. Math. Phys.*, **71:109** (2020), 14 p.

[2] A.E. Shishkov, Ye.A. Yevgenieva, Large and very singular solutions to semilinear elliptic equations (arXiv: https://arxiv.org/abs/2108.09089)

[3] A. Shishkov, L. Veron, Diffusion versus absorption in semilinear elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.* **352** (2009), 206–217.

[1]RUDN University, Moscow, Russia. Email: aeshkv@yahoo.com

[2]Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Ukraine. Email: yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

ON A CHARACTERIZATION OF SETS OF TRANSEFER TIMES

SHKREDOV I.D.

We consider the set of transfer times between two measurable subsets A, B of positive measures in an ergodic probability measure-preserving systems of a countable abelian group G. If the lower asymptotic density of the transfer times

$$\mathcal{R}_{A,B} = \{g \in G \mid \mu(A \cap g^{-1}B) > 0\}.$$

is small, then we prove this set (as well as our system) must be close to a periodic set (system).

Joint work with M. Björklund and A. Fish.

References

[1] Björklund M., Fish A., and Shkredov I. D. *Sets of transfer times with small densities*, Journal de l'École polytechnique–Mathématiques 8 (2021): 311–329; DOI: 10.5802/jep.147

Steklov Mathematical Institute, Russia. Email: ilya.shkredov@gmail.com

OPERATOR ESTIMATES FOR HOMOGENIZATION OF CONVOLUTION-TYPE OPERATORS

SLOUSHCH V.A.[1], PIATNITSKI A.L.[2], SUSLINA T.A.[3], ZHIZHINA E.A.[4]

In $L_2(\mathbb{R}^d)$, we consider an operator $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, given by

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(x) := \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon)\mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon)(u(x) - u(y))\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

It is assumed that $a(x)$ is an even nonnegative function of class $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} = 1$; a function $\mu(x, y)$ satisfies the following conditions

$$\mu(x,y) = \mu(y,x), \quad 0 < \mu_- \leqslant \mu(x,y) \leqslant \mu_+ < +\infty, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mu(x+m, y+n) = \mu(x,y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad m, n \in \mathbb{Z}^d.$$

In addition, we assume that

$$M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x)\, dx < \infty, \quad k = 1, 2, 3.$$

The operator $\mathbb{A}_\varepsilon$ is bounded, self-adjoint, nonnegative, $\min \sigma(\mathbb{A}_\varepsilon) = 0$; see [1]. We study the resolvent $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ for small ε.

We show that $\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, where $\mathbb{A}^0$ is the effective operator. It turns out that $\mathbb{A}^0$ is elliptic second-order differential operator $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$.

Let $\Omega := [0, 1)^d$ be the cell of $\mathbb{Z}^d$; let $v(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))^t$, $x \in \mathbb{R}^d$, be a $\mathbb{Z}^d$-periodic solution of the "cell problem":

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y)(v(x) - v(y))\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y)(x-y)\, dy, \\ \\ \int_\Omega v(y) dy = 0. \end{cases} \tag{1}$$

The problem (1) has the unique $\mathbb{Z}^d$-periodic solution. We define the effective matrix $g^0 = \{\frac{1}{2} g_{ij}\}_{i,j=1,\dots,d}$ by

$$g_{ij} = \int_\Omega dx \int_{\mathbb{R}^d} dy\, G_{ij}(x,y) a(x-y)\mu(x,y),$$
$$G_{ij}(x,y) := (x_i - y_i)(x_j - y_j) - v_j(x)(x_i - y_i) - v_i(x)(x_j - y_j),$$
$$i, j = 1, \dots, d.$$

The matrix g^0 is positive definite. The effective operator $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ is defined on the Sobolev space $H^2(\mathbb{R}^d)$. Our main result is

Theorem 1. [4] *We have*

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(a, \mu)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Remark 1. 1) The effective operator $\mathbb{A}^0$ is unbounded. 2) The estimate (2) is order-sharp. 3) The constant $C(a, \mu)$ is well controlled.

The method is further development of the operator-theoretic approach suggested by M. Sh. Birman and T. A. Suslina in the papers [2, 3].

References

[1] Piatnitski A., Zhizhina E., *Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel*, SIAM J. Math. Anal. **49** (2017), no. 1, 64–81.

[2] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Second order periodic differential operators. Threshold properties and homogenization*, Algebra i Analiz **15** (2003), no. 5, 1–108; English transl., St. Petersburg Math. J. **15** (2004), no. 5, 639–714.

[3] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators*, Algebra i Analiz **17** (2005), no. 6, 1–104; English transl., St. Petersburg Math. J. **17** (2006), no. 6, 897–973.

[4] Zhizhina E. A., Piatnitski A. L., Sloushch V. A., Suslina T. A., *On operator estimates in homogenization of nonlocal convolution-type operators*, PDMI Preprint 8/2021.

[1]St. Petersburg State University, Russia. Email: v.slouzh@spbu.ru

[2]Institute for Information Transmission Problems, Russia.
Email: apiatnitski@gmail.com

[3]St. Petersburg State University, Russia. Email: t.suslina@spbu.ru

[4]Institute for Information Transmission Problems, Russia.
Email: elena.jijina@gmail.com

INVARIANT MANIFOLDS, CANARDS AND TRAVELING WAVES

SOBOLEV V.A.[1], SHCHEPAKINA E.A.[2], ZHANG L.[3], WANG J.[4]

The main object of our consideration is the following system of differential equations:

$$\dot{x} = f(x, y, t, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{y} = g(x, y, t, \varepsilon),$$

where x and f are vectors in Euclidean spaces R^m, y and g are vectors in R^n, $t \in R$, and ε is a small positive parameter. The second equation of the system contains a small factor ε at the derivative. That makes the system singularly perturbed. The goals of the paper are to construct a transformation reducing this system to the system of form

$$\dot{v} = \varphi(v, t, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{z} = \eta(v, z, t, \varepsilon)z.$$

and to consider some applications of this splitting transformation. In particular, the traveling waves problem for the singularly perturbed semi-linear parabolic equations can be investigated by this way. The corresponding problem for a singularly perturbed ODE system can be reduced to a certain problem of lower dimension using a splitting transformation. The main attention is paid to the study of the so-called critical traveling waves, which play an important role in solving various applied problems. In this case, the technique of canards trajectories is essentially used. Let us consider in more detail one of the interesting situations that arose in the study of critical traveling waves.

A statement of the type "The life of canard is very short"can often be found in papers. However, it is not difficult to give examples of canards living for centuries. Consider the system $\dot{x} = z, \quad \varepsilon\dot{z} = x^2 + z^2 - \alpha^2$. The circle $(x + \frac{\varepsilon}{2})^2 + z^2 = \alpha^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}$ is a canard. The upper semicircle is unstable and the lower one is stable. This canard exists provided $\alpha^2 > \varepsilon^2/4$, i.e., this canard lives for centuries. Then it is possible to investigate traveling wave solutions for the following parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - a\frac{\partial u}{\partial s} - b(\frac{\partial u}{\partial s})^2 - cu^2 + \alpha^2.$$

Let $u(s,t) = x(\xi)$ with $\xi = s - vt$. Then we get $-vx' = \varepsilon x'' - ax' - bx'^2 - cx^2 + \alpha^2$. and the case $v = a$ may be considered as a special critical case. In this case, the equation above becomes $\varepsilon x'' - bx'^2 - cx^2 + \alpha^2 = 0$, which is equivalent to the following planar system

$$\frac{dx}{d\xi} = y, \quad \varepsilon\frac{dy}{d\xi} = by^2 + cx^2 - \alpha^2.$$

The first integral of this system is

$$\left(y^2 + \frac{c}{b}x^2 + \frac{\varepsilon c}{b^2}x + \frac{\varepsilon^2 c}{2b^3} - \frac{\alpha^2}{b}\right)e^{-\frac{2b}{\varepsilon}x} = C.$$

For simplicity, it is useful to consider the partial case $b = c > 0$, under which the planar system under consideration has two equilibrium points, a saddle at $(\alpha/\sqrt{b}, 0)$ and a center $(-\alpha/\sqrt{b}, 0)$ for positive α. There is a family of periodic canards within the homoclinic orbit, and this orbit is also a canard. With $b = 1$, we can see the already familiar canard in the form of a circle.

It is for this canard that we can get a traveling wave in an explicit form

$$u(s-t) = \beta\sin(s-t) - \varepsilon/2,$$

where $\beta^2 = \alpha^2 - \varepsilon^2/4$.

This work is partially supported by RFBR and NSFC according to the research project No. 20-51-53008 (V. Sobolev and E. Shchepakina), and NSFC projects No. 12011530062, No.12172199 and No. 11672270 (L. Zhang and J. Wang).

[1]Samara National Research University, Russia. Email: v.sobolev@ssau.ru

[2]Samara National Research University, Russia. Email: shchepakina@ssau.ru

[3]Shandong University of Science and Technology, China.
Email: li-jun0608@163.com

[4]Shandong University of Science and Technology, China.
Email: 14527803@qq.com

UNIQUENESS CRITERIA FOR AN UNCERTAIN DIFFERENTIAL EQUATION ON TIME SCALES

SOUAHI A.

This work concerns the investigation of sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the following initial value problem with fuzzy derivative up to the first order on arbitrary time scales:

$$\begin{cases} {}_{t}^{\mathbb{T}}D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}, 0 < \alpha \leq 1 \\ {}_{t}^{\mathbb{T}}I^{1-\alpha}u(t_0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where ${}_{t}^{\mathbb{T}}D^{\alpha}$ is the (left) fuzzy Riemann-Liouville fractional derivative of order α on time scales $\mathbb{T}$ and ${}_{t}^{\mathbb{T}}I$ is the fuzzy Riemann-Liouville fractional integral on time scales, and $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ is an interval on $\mathbb{T}$. We assume that f is a right-dense continuous function.

The theory of time scales calculus allows to study the dynamic equations, which include both difference and differential equations. Both of which are very important in implementing applications.

Our ideas arise from the papers [1, 2, 3], where the authors used Nagumo and Krasnoselskii-Krein conditions on the nonlinear term f, without satisfying Lipschitz assumption. Motivated greatly by the above works, under appropriate time scales versions of the Krasnoselskii-Krein conditions, we obtain the uniqueness and existence of solution for the following two classes of differential equations, namely the first order ODE and the fractional one.

References

[1] Agarwal R. P. and Lakshmikantham V. *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*, volume 6 of *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993.

[2] Yoruk F.,Bhaskar T. G., and Agarwal R. P. New uniqueness results for fractional differential equations. *Appl. Anal.*, 92(2):259–269, 2013.

[3] Souahi A., Guezane-Lakoud A., Hitta A. *Some uniqueness results for fractional differential equation of arbitrary order with Nagumo like conditions* Thai Journal of Mathematics, 2020.

Laboratory of Advanced Materials, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Badji Mokhtar Annaba University, Algeria.
Email: arsouahi@yahoo.fr

ON MUTUAL DUALITY OF "WEAK"CESÀRO AND WEIGHTED SOBOLEV SPACES ON THE SEMI-AXIS AND THEIR REFLEXIVITY

STEPANOV V.D.

Let $I := (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $\beta > \frac{1}{p}$. We define Cesàro-type spaces as follows:

$$Ces_{p,\beta}(I) := \left\{ f : \|f\|_{Ces_{p,\beta}(I)} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^\beta} \int_0^x |f| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

It is an ideal complete linear space. For $\beta = 1$ it is classical Cesàro space (see [1] and literature given there).

Along with spaces $Ces_{p,\beta}(I)$ it is of interest the study of non-ideal Cesàro-type space

$$\mathcal{C}es_{p,\beta}(I) := \left\{ f : \|f\|_{\mathcal{C}es_{p,\beta}(I)} := \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x f \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Clearly, $L^p_{x^{1-\beta}}(I) \subset Ces_{p,\beta}(I) \subset \mathcal{C}es_{p,\beta}(I)$, where the first imbedding follows from Hardy's inequality and weighted Lebesgue space $L^p_v(I)$ is defined by the norm

$$\|f\|_{L^p_v(I)} := \left(\int_0^\infty |v(x)f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

The main problem is to characterize the associated spaces

$$X'_s := \{ g : \|g\|_{X'_s} := \sup_{f \in X} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_X} < \infty \},$$

$$X'_w := \{ g : \|g\|_{X'_w} := \sup_{f \in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_X} < \infty \},$$

which we call “strong” and “weak” associated spaces, respectively, when $X \in \{Ces_{p,\beta}(I), \mathcal{C}es_{p,\beta}(I)\}$.

Theorem 1. *Let* $1 < p < \infty, \beta > \frac{1}{p}$, $X = Ces_{p,\beta}(I)$. *Then*

$$\|g\|_{X'_w} = \|g\|_{X'_s} \approx \left(\int_I \left(x^{\beta-1} \|g\|_{L^\infty([x,\infty))} \right)^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Let $v_0, v_1 \geq 0$, $v_1 < \infty$ a.e. on I, $\frac{1}{v_1} \in L^{p'}_{\rm loc}(I)$, $v_0 \in L^p_{\rm loc}(I)$, $\|v_0\|_{L^1(I)} > 0$. Weighted Sobolev space is defind by

$$W^1_p(I) := \{ u : \|u\|_{W^1_p(I)} := \|v_0 u\|_{L^p(I)} + \|v_1 Du\|_{L^p(I)} < \infty \}.$$

We also need the subspace $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I) \subset W^1_p(I)$ of all absolutely continuous functions with compact support [2].

Theorem 2. *Let* $1 < p < \infty$, $\beta = \alpha + 1 > \frac{1}{p'}$ *and let* $X = \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,\beta}(I)$ *be the Sobolev space with weights* $v_0(x) = \eta_p x^\alpha$, $v_1(x) = x^\beta$. *Then* $\|g\|_{X'_s} \approx \|g\|_{Ces_{p',\beta}(I)}$, $\|g\|_{X'_w} \approx \|g\|_{\mathcal{C}es_{p,\beta}(I)}$,

Theorem 3. *Let* $1 < p < \infty$, $\beta = \alpha + 1 > \frac{1}{p'}$ *and let* $X = \mathcal{C}es_{p,\beta}(I)$ *Then* $X'_s = \{0\}$, $X'_w = \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p',\beta}(I)$.

Corollary 1. *Let* $X \in \{\mathcal{C}es_{p,\beta}(I), \overset{\circ\circ}{W}{}^1_{p,\beta}(I)\}$. *Then* $[X'_w]'_w = X$.

Remark 1. Similar results are valid for the Copson function spaces [3].

The work of the author (except Theorem 1) was supported by the Russian Science Foundation under grant 19-11-00087 and performed in Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences.

References

[1] S. V. Astashkin, L. Maligranda, Structure of Cesàro function spaces: a survey. Function spaces X, 13-40, Banach Center Publ., 102, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2014.

[2] D.V. Prokhorov, V.D. Stepanov, E.P. Ushakova, Characterization of the function spaces associated with weighted Sobolev spaces of the first order on the real line, Russian Math. Surveys. 74:6 (2019) 1075–1115.

[3] V.D. Stepanov, On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity, J. Math. Anal. Appl., 507 (2022) 125764. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125764

Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Kim Yu Chen 65, Khabarovsk 680000, Russia.
Email: stepanov@mi-ras.ru

STATIONARY VORTEX FLUID MOTIONS AND THE MAXIMUM PRINCIPLE

STEPIN S.A.

The topic of the talk is revision of solvability conditions for equation $\Delta u = f(u)$ arising at the study of stationary plane-parallel ideal fluid motion with a prescribed vorticity. Investigation of the properties of solutions to the equations of the class in question is carried out within the framework of the approach based on application of the maximum principle.

Moscow State University, Russia. Email: ststepin@mail.ru

OPERATOR ERROR ESTIMATES FOR HOMOGENIZATION OF HIGHER-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

SUSLINA T.A.

Suppose that Γ is a lattice in $\mathbb{R}^d$, Ω is the cell of Γ. For instance, if $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, then $\Omega = (0,1)^d$. Our main object is a selfadjoint strongly elliptic operator of order $2p$, $p \geqslant 2$, acting in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ and given by

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} = -i\nabla, \quad g^\varepsilon(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}/\varepsilon). \tag{1}$$

Here $\varepsilon > 0$; $g(\mathbf{x})$ is a Hermitian $(m \times m)$-matrix-valued function. It is assumed that $g(\mathbf{x})$ is bounded, positive definite, and Γ-periodic. Next, $b(\mathbf{D})$ is a differential operator of order p of the form $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$, where b_α are constant $(m \times n)$-matrices (in general, with complex entries). We assume that $m \geqslant n$ and the symbol $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \boldsymbol{\xi}^\alpha$ has maximal rank: $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ for $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. The precise definition of the operator (1) is given in terms of the corresponding quadratic form.

We study the Cauchy problem for the hyperbolic equation:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) &= -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2}$$

For $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, the solution of problem (2) is represented as

$$(\mathbf{u}_\varepsilon)(\cdot,t) = \cos(tA_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + A_\varepsilon^{-1/2}\sin(tA_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi}.$$

We are interested in the behavior of the solution of problem (2) for small ε. So, in operator terms, the problem is to study the behavior of the operator-valued functions $\cos(tA_\varepsilon^{1/2})$ and $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(tA_\varepsilon^{1/2})$ for small ε.

In order to formulate the results, we introduce the effective operator A^0 given by $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, $\operatorname{Dom} A^0 = H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Here g^0 is a constant positive matrix called the effective matrix. Recall the definition of g^0. Let $\Lambda(\mathbf{x})$ be a periodic solution of the "cell problem":

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Then $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)\, d\mathbf{x}$. Our main result is

Theorem 1. [1] *Let $t \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$. We have*

$$\left\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2}) \right\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon,$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(tA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(t(A^0)^{1/2}) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C|t|\varepsilon.$$

For a fixed t these estimates are order-sharp.

Under some additional assumptions the results are improved. In particular, this is the case for a scalar operator with real-valued coefficients.

Theorem 2. [1] *Let $n = 1$. Suppose that the matrices $g(\mathbf{x})$ and b_α have real entries. For $t \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$ we have*

$$\left\| \cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2}) \right\|_{H^{p+2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon^2,$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(tA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(t(A^0)^{1/2}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C|t|\varepsilon^2.$$

In terms of the solution of problem (2), we deduce the following results. Let $\mathbf{u}_0$ be the solution of the homogenized Cauchy problem:

$$\partial_t^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = -(A^0\mathbf{u}_0)(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R},$$
$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (\partial_t \mathbf{u}_0)(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).$$

Corollary 1. 1°. *Let $\boldsymbol{\phi} \in H^{p+1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ and $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Then*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)} + C|t|\varepsilon \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Let $n = 1$. Suppose that the matrices $g(\mathbf{x})$ and b_α have real entries. Let $\boldsymbol{\phi} \in H^{p+2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ and $\boldsymbol{\psi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Then*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon^2 \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{p+2}(\mathbb{R}^d)} + C|t|\varepsilon^2 \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

The research was supported by RSF grant 17-11-01069.

References

[1] Suslina T. A., *Homogenization of the higher-order hyperbolic equations with periodic coefficients*, Lobachevskii J. Math. (2022), no. 2, to appear.

St. Petersburg State University, Russia. Email: t.suslina@spbu.ru

THE WAVE EQUATION WITH SYMMETRIC VELOCITY ON A HYBRID MANIFOLD OBTAINED BY GLUING A RAY TO A THREE-DIMENSIONAL SPHERE

TSVETKOVA A.V.

We study the Cauchy problem for the wave equation with variable (symmetric) velocity on the hybrid manifold obtained by gluing a ray to a three-dimensional sphere. It is assumed that the initial conditions are localized on the ray and the velocity on the sphere depends only on the geodesic distance to the gluing point.

The wave operator on such an object is determined based on two considerations. The first is that on each component of the hybrid manifold the operator must coincide with the standard wave operator. The second is that the operator must be self-adjoint. In order to guarantee self-adjointness, it is necessary to choose the boundary conditions at the gluing point in a certain way. Wherein the solution on the surface will have the singularity at the gluing point.

In the talk the asymptotic series of the solution of the problem as parameter characterizing the initial perturbation tends to zero will be given. Since the sphere is compact, then the wave propagating over the sphere is reflected at the pole opposite to the gluing point and returns to the ray. Thus, the question of the distribution of wave energy at every moment of time is also interested. We will describe the energy distribution for each boundary condition defining a self-adjoint operator.

The talk is based on the joint work with A.I. Shafarevich.

The research was supported by RSF grant 21-71-00065.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Russia.
Email: annatsvetkova25@gmail.com

ON EXTENSIONS OF SOBOLEV FUNCTIONS DEFINED ON COMPACTA

TYULENEV A.I.

We fix the following data:

(A) parameters $n \in [2,\infty) \cap \mathbb{N}$, $p \in (1,n]$, $d^{*} \in (n-p,n]$ and parameters $\varepsilon \in (0, \min\{p-(n-d^{*}), p-1\})$;

(B) an arbitrary compact set $S \subset [0,1]^{n}$ with $\mathcal{H}^{d^{*}}_{\infty}(S) > 0$.

We assume that the definition of the Sobolev space $W^{1}_{p}(\mathbb{R}^{n})$ is known. Since $n-d^{*} < p \leq n$, it is well known that for every element $F \in W^{1}_{p}(\mathbb{R}^{n})$, there exists a representative $\overline{F}$ having Lebesgue points everywhere except a set of

$\mathcal{H}^{d^*}$-measure zero. Therefore, given $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ we define the d^*-trace of F to the set S by letting

$$F|_S^{d^*} := \{f : S \to \mathbb{R} : f \text{ is Borel and } f(x) = \overline{F}(x) \text{ for } \mathcal{H}^{d^*} - \text{a.e. } x \in S\}.$$

Define the d^*-trace space $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*}$ by the equality

$$W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*} := \{[f] : [f] = F|_S^{d^*} \text{ for some } F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)\}$$

and equip it with the usual quotient-space norm, i.e., for each element $[f] \in W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*}$ we set

$$\|[f]\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*}} := \inf\{\|F\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} : [f] = F|_S^{d^*}\}.$$

Denote by $\operatorname{Tr}|_S^{d^*} : W_p^1(\mathbb{R}^n) \to W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*}$ the corresponding d^*-trace operator.

Theorem 1. *There exists a bounded linear operator* $\operatorname{Ext} = \operatorname{Ext}(S, \varepsilon)$ *mapping the space* $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*}$ *into the space* $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)$. *Furthermore,* $\operatorname{Ext} \circ \operatorname{Tr}_S^{d^*} = \operatorname{Id}$ *on* $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{d^*}$ *and the norm of* Ext *depends on* n, p, d^* *and* ε.

Remark 1. The detailed exposition of the results is available in [2]. The short announcement of the results from [2] was recently published in [1].

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant 19-11-00087 in the Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

References

[1] Tyulenev A. I., *Almost Sharp Descriptions of Traces of Sobolev Spaces on Compacta*, Math. Notes, 110:6, 2021, 976–980.

[2] Tyulenev A. I., *Almost sharp descriptions of traces of Sobolev* $W_p^1(\mathbb{R}^n)$*-spaces to arbitrary compact subsets of* $\mathbb{R}^n$*. The case* $p \in (1, n]$, arXiv:2109.07553, 2021.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Moscow,Russia. Email: tyulenev@mi-ras.ru

TWO–DIMENSIONAL RECTANGULAR INTEGRATION OPERATOR IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES

USHAKOVA E.P.

Let $v \geq 0$ be a weight function on $\mathbb{R}_+^2 := (0, \infty)^2$. For $p > 1$ the weighted Lebesgue space $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ consists of all Lebesgue measurable functions f on $\mathbb{R}_+^2$ such that $\|f\|_{p,v}^p := \int_{\mathbb{R}_+^2} |f|^p v < \infty$. The two–dimensional rectangular integration operator I_2 is defined by the formula

$$I_2 f(x, y) \colon = \int_0^x \int_0^y f(s, t)\, ds dt, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

The dual to I_2 transformation I_2^* has the form

$$I_2^* g(s,t) \colon = \int_s^\infty \int_t^\infty g(x,y)\,dxdy, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

For given weights v, w and fixed parameters $1 < p, q < \infty$ we study boundedness properties of I_2 from $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ to $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$.

In 1985 E. Sawyer found a version of the boundedness criterion [2].

Theorem 1. [2] *Put $p' := p/(p-1)$ and $\sigma := v^{1-p'}$. Let $1 < p \le q < \infty$. The operator I_2 is bounded from $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ to $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ if and only if*

$$A_1 := \sup_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2} \left[I_2^* w(t_1,t_2)\right]^{\frac{1}{q}} \left[I_2\sigma(t_1,t_2)\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{1}$$

$$A_2 := \sup_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2} \left(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \left(I_2\sigma\right)^q w\right)^{\frac{1}{q}} \left[I_2\sigma(t_1,t_2)\right]^{-\frac{1}{p}} < \infty, \tag{2}$$

$$A_3 := \sup_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2} \left(\int_{t_1}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty} \left(I_2^* w\right)^{p'} \sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left[I_2^* w(t_1,t_2)\right]^{-\frac{1}{q'}} < \infty. \tag{3}$$

Besides, the operator's norm $\|I_2\|_{L_v^p(\mathbb{R}_+^2)\to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)}$ is equivalent to $\sum_{i=1}^3 A_i$ with equivalence constants depending on p and q only.

In one–dimensional case the analogs of the conditions (1)–(3) are equivalent to each other (see e.g. [1] and references therein). For the two–dimensional operator I_2 this, generally speaking, is not true. Moreover, as shown in [2, § 4] for $p = q = 2$, no two of the conditions (1)–(3) are sufficient for $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$. However, the construction of the second counterexample in [2, § 4] fails in the case $p < q$.

The main result of this work is a new boundedness criterion for the two–dimensional rectangular integration operator I_2 from $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ to $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ in the case $1 < p < q < \infty$. In comparison with Theorem 1, where the norm $\|I_2\| := \|I_2\|_{L_v^p(\mathbb{R}_+^2)\to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)}$ is equivalent to $A_1 + A_2 + A_3$, it is proven in Theorem 2 that for $1 < p < q < \infty$ the boundedness of I_2 is controlled by the Muckenhoupt–type functional A_1 only. To state our result we need notations: $\alpha := \alpha(p,q) = \frac{p^2(q-1)}{q-p}$, $\alpha' := \alpha(q',p')$, $\mathbb{C}_{\alpha,\alpha'} := 3^{3q}\Big[\left(\frac{2^4}{3}\right)^q \max\Big\{\alpha, 2q(q')^{\frac{q}{p'}}\Big\}\left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\right)^{\frac{q}{p}} + 3^{\frac{1}{p}}(\alpha')^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}\Big]$.

Theorem 2. *For $1 < p < q < \infty$ the operator I_2 is bounded from $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ to $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ if and only if $A_1 < \infty$. Moreover,*

$$A_1 \le \|I_2\|_{L_v^p(\mathbb{R}_+^2)\to L_w^q(\mathbb{R}_+^2)} \le \mathbb{C}_{\alpha,\alpha'}\, A_1.$$

Remark 1. The results of Theorems 1 and 2 are related as follows:

$$A_1 \leq \|I_2\| \leq \mathbb{C}_{1,1}\big[A_1 + A_2 + A_3\big] \leq \mathbb{C}_{1,1}\big[1 + \alpha(p,q)^{\frac{1}{q}} + \alpha(q',p')^{\frac{1}{p'}}\big]A_1, \quad (4)$$

where $\lim_{p\uparrow q}\big[\alpha(p,q) + \alpha(q',p')\big] = \infty$. Thus, the last estimate in (4) and the upper bound in Theorem 2 have blow-up for $p \uparrow q$.

The case of parameters $1 < q < p < \infty$ is also considered in the work.

The research was supported by RSF grant 22-21-00579.

References

[1] Kufner A., Persson L.–E., Samko N., Weighted inequalities of Hardy-type. World Scientific Publishing Co. Inc., New Jersey, 2017.

[2] Sawyer E., *Weighted inequalities for two–dimensional Hardy operator*, Studia Math., Vol. 82, No 1 (1985), 1–16.

[3] Stepanov V. D. and Ushakova E. P., *On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator - extension of the E. Sawyer theorem*, Math. Inequal. & Appl., Vol. 24, No 3 (2021), 617–634.

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Russia; Computing Center of FEB RAS, Khabarovsk, Russia. Email: elenau@inbox.ru

ON THE EXTREMAL FUNCTION IN THE EMBEDDING THEOREM OF FRACTIONAL ORDER

USTINOV N.S.

Let $n \geq 1$, and let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with Lipschitz boundary. Assume that $s \in (0,1)$, $2^*_s := 2n/(n-2s)$ and

$$q \in \begin{cases} [1, 2^*_s] & \text{if } n \geq 2 \ \text{ or } \ n = 1 \text{ and } s < 1/2; \\ [1, \infty) & \text{if } n = 1 \text{ and } s = 1/2; \\ [1, \infty] & \text{if } n = 1 \text{ and } s > 1/2. \end{cases}$$

We consider the fractional embedding theorem $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}^{\Omega}_{s,q}[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega)}} > 0. \quad (1)$$

For $q \in [1, 2^*_s)$, this embedding is compact, and the extremal in (1) exists. Moreover, in [2] it was shown that, for $q = 2^*_s$, the extremal in (1) exists in any $\mathcal{C}^2$ domain Ω for $n \geq 3$ and $2s > 1$.

The properties of extremals in (1) depend on the shape of the domain Ω, on its size, and on the norm of $\mathcal{H}^s(\Omega)$. We define

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)} := \langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{2}$$

where the quadratic form $\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle$ is defined by

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp}u, u\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \cdot (u, \phi_j)^2_{L_2(\Omega)} \tag{3}$$

with λ_j as eigenvalues and ϕ_j as orthonormal eigenfunctions of the Neumann Laplacian in Ω. The operator $(-\Delta)^s_{Sp}$ generated by (3), is called the *spectral Neumann fractional Laplacian.*

In this talk we discuss the problem of the constancy of the minimizer in (1). The simple fact here is that for $q \in [1, 2]$ such minimizer is constant and unique. For the interesting case $q > 2$ the answer depends on the domain size: for the family of domains $\varepsilon\Omega$, we prove that, for small dilation coefficients ε, the unique minimizer is constant, whereas for large ε, a constant function is not even a local minimizer. We also discuss whether a constant function is a global minimizer if it is a local one.

For the local case $s = 1$ similar effects were established in [1] for the embedding theorem $\mathcal{W}^1_p(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ with the Neumann p-Laplacian.

The talk is based on work [3].

The research was supported by RFBR grant 20-01-00630.

References

[1] Nazarov A.I. and Scheglova A.P., *On some properties of extremals in a variational problem generated by the Sobolev embedding theorem*, Probl. Mat. Anal., **27** (2004), 109-136 (Russian); English transl.: J. Math. Sci., **120** (2004), no. 2, 1125–1144.

[2] Ustinov N.S., *On solvability of a critical semilinear problem with the spectral Neumann fractional Laplacian*, Algebra i Analiz, **33** (2021), no. 1, 194–212.

[3] Ustinov N.S., *On the constancy of the extremal function in the embedding theorem of fractional order*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **54** (2020), no. 4, 85–97 (Russian); English transl.: Funct. Anal. Appl., **54** (2020), no. 4, 295–305.

St.Petersburg State University, Russia. Email: ustinns@yandex.ru

NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH MEASURED VALUED ABSORPTION POTENTIAL

VÉRON L.

Joint work with Nicolas Saintier, Universidad de Buenos Aires, Argentina (Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, XXII (2021), 351-397).

We study the existence of solutions to the problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + g(u)\sigma = \mu \qquad & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \qquad & \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

in a bounded domain Ω, where σ is a nonnegative Radon measure in Ω, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ is a continuous absorbing function (i.e. $rg(r) \geq 0$ for $|r|$ large enough) and μ is a Radon measure in Ω. We study in particular the case where $g(r) = |r|^{p-1}r$ with $p > 1$. We give results on existence and uniqueness of solutions under appropriate assumptions on σ, usually in a Morrey class of measures, and on μ usually under a capacitary type absolute continuity. Applications are proposed in connection with Neumann type nonlinear problems.

CNRS Institut Denis Poisson Université de Tours, France.
Email: veronl@univ-tours.fr

AN ANALYTICAL FIRST INTEGRAL WITH A FRACTAL NATURAL BOUNDARY

VARIN V.P.

Iterations of an analytical map (or a formal power series)

$$y \to F(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, y^{n+1}, \quad F^{(n)}(y) = F \circ F \circ \cdots \circ F(y),\ n \text{ times},$$

have an obvious semigroup property:

$$F^{(1)}(y) = F(y),\ F^{(0)}(y) = y;\ F^{(n+m)}(y) = F^{(n)}(F^{(m)}(y)),\ n, m \geq 0.$$

The classical problem of a *continuous iteration* (CI) consists in generalizing this property to arbitrary complex numbers, i.e., in construction of a continuous group of maps $y \to F^{(x)}(y)$.

This problem is usually treated as a combinatorial one. It is solved with Jabotinsky infinite matrices and Bell exponential polynomials [1]. We have found an elementary solution of this problem [2].

The CI can be written as

$$F^{(x)}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, y^{n+1}, \tag{1}$$

where $a_n(x)$ are uniquely determined polynomials of a degree $\le n$:

$$b_n = \frac{d}{dx} a_n(x)\bigg|_{x=0}, \quad b_n = c_n - d_n(1), \quad a_n(x) = b_n\, x + d_n(x),$$

$$\text{where} \quad d_n(x) = \int\limits_0^x \left(\sum_{m=1}^{n-1} (m+1)\, a_m(t)\, b_{n-m} \right) dt, \quad n \ge 1.$$

Formal power series (1) are almost always divergent if x is not an integer. Although the (isolated) proofs of this fact are rather difficult (see [3] for the logistic map $y \to y - y^2$).

The map $y \to F^{(n)}(y)$ can be considered as a discrete dynamical system. Then the construction of CI can be considered as a restoration of a continuous dynamical system (CDS) by its discrete reduction, while the formal series (1) represent invariant curves of CDS. An analogy with the Poincaré map is obvious.

The existence of analytical invariant curves in a CDS is equivalent to the existence of an additional analytical first integral. These curves in a CDS are found usually (and locally) as divergent power series. Thus most often they are not regarded as existent, not to mention analytical.

The CI (1) gives an example of a CDS with almost always divergent expansions of invariant curves, which are analytical nonetheless [4].

Theorem 1. *For an arbitrary formal series $F(y)$, there exists an analytical first integral $H(x, y)$ the level lines of which correspond to the invariant curves of continuous iteration for sufficiently small complex y.*

For the logistic map $y \to y - y^2$, the first integral $H(x, y)$ can be found explicitly

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + \frac{1}{2}\log(y^2) + U(y), \quad \text{where}$$

$$U(y) - U(y - y^2) = \frac{y}{1-y} + \frac{1}{2}\log(1-y)^2.$$

By this equation, the function $U(y)$ is computed constructively and with an arbitrary precision. So $U(y)$, in a sense, is a new special function. All its singularities are found explicitly. They form the Julia set of the map $y \to y - y^2$, while $U(y)$ is holomorphic inside this set, i.e., in a Fatou domain with a fractal boundary.

Thus a CDS can be integrable in a finite domain with a fractal boundary, while chaos (i.e., nonintegrability) be the property of its first integral.

References

[1] Comtet L., *Advanced Combinatorics*, The Art of Finite and Infinite Expansions. (3rd ed.) Dordrecht-Holland: D. Reidel publ. company 1974.
[2] Varin V.P., *On interpolation of some recurrent sequences*, Comput. Math. Math. Phys. 61 (6), 913-925. 2021.
[3] Levin M., *MSc. Thesis*, Israel Institute of Technology. 1960.
[4] Varin V.P., *Invariant curves of some discrete dynamical systems*, Comput. Math. Math. Phys. (to appear in (2), 2022).

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia. Email: varin@keldysh.ru

SPHERICAL POLYHARMONIC EQUATION AND SPHERICAL CUBATURE FORMULAS

VASKEVICH V.L.

Let S be the sphere of unit radius in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. The projection of an arbitrary point x in $\mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, to S will be denoted by θ; i.e., we assume that $\theta = x/\rho$, where $\rho = |x|$. So θ is a point in S. In what follows, the integrals over θ are surface integrals over dS. Let us consider the differential equation of the form

$$(-\mathfrak{D})^m u(\theta) = p(\theta), \tag{1}$$

where $\mathfrak{D}$ is the Laplace—Beltrami operator with respect to $d\theta$ [1], m is a positive integer, and $p(\theta)$ is a continuous function on S which obey the orthogonality condition $\int p(\theta)\, d\theta = 0$. The main results of the talk are about the solutions to (1). They are formulated in the following two theorems [2].

Theorem 1. *Let m be an integer and $m > (n-1)/2$. Then for every functional $l(\theta)$ in $C^*(S)$ with $(l, 1) = 0$, the problem*

$$(-\mathfrak{D})^m u(\theta) = l(\theta), \qquad \int u(\theta)\, d\theta = 0, \tag{2}$$

has a unique solution $u(\theta)$ in the spherical Sobolev space H^m. For $m \geq (3n-2)/4$ the solution to (2) belongs to the space $C^{(2m-3n/2+1)}(S)$.

The expansion of $u(\theta)$ in the series has the form

$$u(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m(n+k-2)^m} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} (l, Y_{k,l}) Y_{k,l}(\theta).$$

Here the set of functions $\{Y_{k,l}(\theta) \mid l = 1, 2, \dots, \sigma(k)\}$ constitute an orthonormal basis for the space of spherical harmonics of order k:

$$\int Y_{k,l}(\theta) Y_{k,p}(\theta)\, d\theta = \delta_l^p.$$

Theorem 2. *Let $p(\theta)$ be a member of the spherical Sobolev space H^s for some $s > (n-1)/2$ and the equality $\int p(\theta)\, d\theta = 0$ holds. Then there is a unique solution to the spherical polyharmonic equation*

$$(-\mathfrak{D})^m u(\theta) = p(\theta)$$

such that it is orthogonal to the identically-one function and belongs to the space H^q for $q = s + 2m$. The function $u(\theta)$ can be written as follows

$$u(\theta) = \int G(\theta \cdot \theta') p(\theta')\, d\theta',$$

where the function $G(\theta \cdot \theta')$ is the Green's function of $(-\mathfrak{D})^m$.

The definition of $G(\theta \cdot \theta')$ is as follows

$$G(\theta \cdot \theta') = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^m (n+k-2)^m} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta'). \tag{3}$$

Here $G_k^{(n)}$ is the normalized Hegenbauer polynomial. For $s > (n-1)/2$ the series on the right-hand side of (3) converges absolutely and uniformly. For two points θ and $\theta^{(j)}$ in S the function $G(\theta \cdot \theta^{(j)})$ is a solution to the equation

$$(-\mathfrak{D})^m G(\theta \cdot \theta^{(j)}) = \delta(\theta - \theta^{(j)}) - \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \delta(\theta - \theta')\, d\theta'.$$

Spherical polyharmonic equation (1) with error functionals in the right hand side is very impotent in the theory of cubature formulas [3–4].

References

[1] Lizorkin P. I. and Nikolskii S. M., *Approximation by spherical functions*, Proc. Steklov Inst. Math., **173**, 195–203, 1987.

[2] Vaskevich V. L., *Spherical polyharmonic equation*, Functional Differential Equations, **24**, No. 3–4, 157–166, 2017.

[3] Vaskevich V. L., *Spherical cubature formulas in Sobolev spaces*, Siberian Mathematical Journal, **58**, No. 3, 408–418, 2017.

[4] Sobolev S. L. and Vaskevich V. L., *The Theory of Cubature Formulas*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia.
Email: v.vaskevich@g.nsu.ru

LIMIT CYCLES BIFURCATING FROM A PERIOD ANNULUS OF PLANAR HAMILTONIAN SYSTEMS

XIAO DONGMEI

In this talk, we first introduce Hilbert 16th problem on a period annulus and the Arnol'd-Hilbert's 16th problem, then give an answer on the Arnol'd-Hilbert's 16th problem for a class of planar polynomial Hamiltonian systems by a small perturbation. This is based on joint works with J-P. Franciose and H. He.

Shanghai Jiao Tong University, China. Email: xiaodm@sjtu.edu.cn

STABILITY RESULTS OF A COUPLED SYSTEM OF NONLINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS INVOLVING RIEMMAN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVES

YESSAAD MOKHTARI S.

Recently, several existence and uniqueness results for some systems of fractional differential equations was obtained by means of fixed point type theorems

For example In [3] X. Su established sufficient conditions for the existence of nontrivial solution for a two-point boundary value problem for the following system :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t, v(t), D^{\mu}v(t)), & 0 < t < 1, \\ D^{\beta}v(t) = g(t, u(t), D^{\nu}u(t)), & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = v(1) = v(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Where $1 < \alpha, \beta < 2, \alpha - \nu \geq 1, \beta - \mu \geq 1, \nu, \mu > 0, f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given continuous functions and D is the Riemann-Liouville fractional derivative.

Definition 1. The system (1) is stable (with respect to orders of derivatives) if and only if

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists K > 0, \ \left|\alpha - \overline{\alpha}\right|^{r} + \left|\beta - \overline{\beta}\right|^{\overline{r}} < \epsilon,$$

$$\Rightarrow$$

$$|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}| < k\epsilon,$$

where (u, v) et $(\overline{u}, \overline{v})$ are respectively the solutions of (1) with the orders of derivatives replaced by $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\nu}$ and $\overline{\mu}$.

Lemma 1. *Let α, ϵ_1 and $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_+ (0 < t < 1)$, suppose that $\delta : [0, T] \to \mathbb{R}$ is a continuous function such that*

$$|\delta (x)| \leq \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\Gamma (\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha - 1} |\delta (t)| \, dt, \ \forall x \in [0, T],$$

then

$$|\delta (x)| \leq \epsilon_1 E_\alpha (\epsilon_2 T^\alpha),$$

E_α is the Mittag-Leffler function : $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$, $(\alpha > 0)$.

Theorem 1. *Let $\psi_{(\alpha,\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\nu+1)}$, if*

$$\max_{t \in [0.1]} |f (s, v (s), D^\mu v (s))| < \infty, \ \max_{t \in [0.1]} |g (s, v (s), D^\nu v (s))| < \infty,$$

and

$$\Delta = \max (K_f, L_f, K_g, L_g) \max \left\{ \psi_{(\alpha,\nu)}, \psi_{(\beta,\mu)} \right\} < 1,$$

then system (1) is stable.

Remark 1. The Gronwall inequality implies the stability of solutions to the system (1).

References

[1] Kilbas A. A, Srivastava H. M. and Trujillo . J. J. , Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).

[2] Diethelm K. J. Fordethelm, N, Multi-order fractional differential equation and their numerical solution, Appl. Math. Comput. (2004) 621-640.

[3] X. Su, Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, Appl. Math. Letters (2009), 64-69.

Higher School of Management - Annaba - Algeria.
Email: yessadsabah@gmail.com

BIFURCATION OF POSITIVE PERIODIC SOLUTIONS TO NON-AUTONOMOUS UNDAMPED DUFFING EQUATIONS

ŠREMR J.

We will discuss a bifurcation of positive ω-periodic solutions to the parameter-dependent equation

$$u'' = p(t)u - h(t)u^3 + \mu f(t), \tag{1}$$

where $p, h, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are ω-periodic locally Lebesgue integrable functions and $\mu \in \mathbb{R}$ is a parameter.

A particular case of (1) is the Duffing equation

$$u'' = au - bu^3 + F(t), \tag{2}$$

with $a, b > 0$, which is derived when approximating a non-linearity in the equation of motion of various oscillators. Our results can be applied, for instance, to the forcing terms

$$F(t) := -f_0, \qquad F(t) := A\left(\sin\frac{2\pi t}{\omega} - \frac{1}{2}\right),$$

where $f_0, A > 0$. If $F(t) \equiv -\mu$, then the phase portraits of (2) can be elaborated depending on the choice of the parameter μ and, thus, one can show that, crossing the value $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3b}}$, a bifurcation of positive periodic solutions to equation (2) occurs.

We extend this result for the non-autonomous equation (1) under the assumption that the Green's function of the periodic problem

$$u'' = p(t)u; \quad u(0) = u(\omega),\ u'(0) = u'(\omega)$$

is negative and

$$h(t) \geq 0 \quad \text{for a. e. } t \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^\omega f(s)\mathrm{d}s < 0.$$

Brno University of Technology, Czech Republic. Email: sremr@fme.vutbr.cz

О МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ СИСТЕМЫ А.В. БИЦАДЗЕ

АБДРАХМАНОВ А.М.[1], АБДРАХМАНОВА Р.П.[2]

Рассмотрим систему Бицадце $w_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, где $w = u + iv$; если вместо $w = u + iv$ взять $\bar{w} = u + iv$, то система $\bar{w}_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ в вещественной форме запишется так

$$-\Delta u + 2\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0,$$
$$-\Delta v + 2\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) = 0.$$

Поэтому систему

$$-\Delta u_i + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = 0, \quad i = 1, 2, .., n, \tag{1}$$

можно считать многомерным аналогом системы Бицадзе. Получаем условия разрешимости задачи Дирихле для системы (1) в зависимости от λ.

Для системы

$$-\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\Delta u_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=0,\quad i=1,2,..,n, \qquad (2)$$

которая является эллиптической системой везде, кроме точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ и n -мерной сферы $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \lambda$, где она вырождается.

1. Пусть область $D = \{X \in \Re^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 < R^2\}$ $R^2 > \lambda$. Рассмотрена задача Дирихле для системы (2) в следующей постановке: найти регулярное в области D ограниченное решение системы (2), удовлетворяющее на границе $\Gamma = \{X : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = R^2\}$ условиям

$$u_j\big|_\Gamma = f_j : f_j \in C^{2,\alpha}(\Gamma), j = 1, 2, .., n-1, \qquad (3)$$

$$u_n\big|_{\delta_\Gamma} = f_n : f_n \in C^{1,\alpha}(\delta_\Gamma),\ \delta_\Gamma = \{X : x_n = 0,\ \ x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2 = R^2\} \quad (4)$$

Доказано, что задача (3),(4) для системы (2) разрешима и ее решение единственно в классе функций, ограниченных на бесконечности.

2. В случае $R^2 < \lambda$ к краевым условиям (3),(4) необходимо добавить условие

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\big|_\Gamma = f_{n+1};\quad f_{n+1} \in C^{1,\alpha}(\Gamma) \qquad (5)$$

Доказано, что задача (3),(4),(5) для системы (2) разрешима и ее решение единственно в классе ограниченных функций.

[1]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия. Email: abdrai@mail.ru

[2]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия. Email: vmk_rimma@mail.ru

О СИСТЕМАХ, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖАТСЯ В ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРАХ

АВДЕЕВ Н.Н.

Известно, что теория аттракторов динамических систем не позволяет найти глобальные аттракторы некоторых уравнений и систем. Один из альтернативных подходов — теория траекторных аттракторов [1]. В [2] приведен пример уравнения (в $\mathbb{R}^1$), пространство траекторий которого содержит не весь свой траекторный аттрактор, хотя и пересекается с ним. В [3, 4] построен пример системы, для которой минимальный траекторный аттрактор целиком лежит вне пространства траекторий этой системы и для которого существует глобальный аттрактор в смысле аттрактора траекторных пространств, но аттракторов в смысле динамических систем не существует. Однако, как это обычно бывает, первый пример оказался достаточно громоздким; цель настоящей заметки — дать более простой пример такой системы.

Будем рассматривать на плоскости полярную систему координат ($\varphi < 2\pi$; для удобства считаем $\varphi = 0$ при $r = 0$).

Пример 1.

$$\begin{cases} \rho' = |1-\rho| \cdot (1-\rho), \\ \varphi' = (2\pi - \varphi)^2 \end{cases} \tag{1}$$

Минимальным траекторным аттрактором системы (1) является множество из одной функции: $\{(\varphi(t), \rho(t)) \equiv (0,1)\}$. Аттрактора динамической системы нет, т.к. сечение минимального траекторного аттрактора — точка $(\varphi = 0, \rho = 1)$ — не инвариантна.

Этот пример можно немного модифицировать, чтобы минимальный траекторный аттрактор содержал бесконечное количество функций.

Пример 2.

$$\begin{cases} \rho' = |1-\rho| \cdot (1-\rho), \\ \varphi' = \begin{cases} 0, & \rho \neq 1, \\ (2\pi - \varphi)^2, & \rho = 1. \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Минимальным траекторным аттрактором системы (2) является множество $\{(\varphi(t), \rho(t)) \equiv (\mathrm{const}, 1)\}$. Аттрактора динамической системы нет, т.к. сечение минимального траекторного аттрактора — окружность $\{\rho = 1\}$ — не инвариантна.

Список литературы

[1] *В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев.* Аттракторы уравнений гидродинамики // УМН. - 2014. - Т. 69. - No 5. - С. 81-156

[2] *Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. — Walter de Gruyter, 2008. — Т. 12.

[3] *Звягин В. Г., Авдеев Н. Н.* Пример системы, минимальный траекторный аттрактор которой не содержит решений системы //Математические заметки. — 2018. — Т. 104. — №. 6. — С. 937-941.

[4] *Звягин В. Г., Авдеев Н. Н.* Об одной системе, минимальный траекторный аттрактор которой не содержит ее решений //Современные методы теории краевых задач. – 2018. – С. 101-102.

Воронежский государственный университет, Россия.
Email: avdeev@math.vsu.ru

КЛАССИФКАЦИЯ СИММЕТРИЙ И ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

АКСЕНОВ А.В.[1], ДРУЖКОВ К.П.[2]

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [1]

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + \eta_x = 0,\\ &v_t + uv_x + vv_y + \eta_y = 0,\\ &\eta_t + [u(\eta+h)]_x + [v(\eta+h)]_y = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $z = -h(x,y)$, $h(x,y) \geqslant 0$ – профиль дна, $u = u(x,y,t), v = v(x,y,t)$ – компоненты средней по глубине горизонтальной скорости, $\eta = \eta(x,y,t)$ – отклонение свободной поверхности $(\eta + h \geqslant 0)$.

Операторы симметрии системы уравнений (1) ищем в виде

$$X = \xi^1(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial t} + \\ + \eta^1(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial v} + \eta^3(x,y,t,u,v,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Применяя стандартный критерий инвариантности [2], получим переопределенную линейную однородную систему определяющих уравнений. Исследование на совместность определяющей системы приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} &\xi^1 = -\dot a x - 2By + 2k(t), && \eta^1 = (\dot a + 2C)u - 2Bv - \ddot a x + 2\dot k,\\ &\xi^2 = -\dot a y + 2Bx + 2l(t), && \eta^2 = (\dot a + 2C)v + 2Bu - \ddot a y + 2\dot l,\\ &\xi^3 = -2a(t) - 2Ct, && \eta^3 = (2\dot a + 4C)\eta + \frac{x^2+y^2}{2}\dddot a - 2\ddot k x - 2\ddot l y + \dot f, \end{aligned}$$

где функции $a(t)$, $k(t)$, $l(t)$, $f(t)$ и константы B, C для каждого профиля дна $h(x,y)$ определяются из классифицирующего уравнения

$$\begin{aligned} &\big(-\dot a x - 2By + 2k(t)\big)h_x + \big(-\dot a y + 2Bx + 2l(t)\big)h_y -\\ &-(2\dot a + 4C)h(x,y) = -\frac{x^2+y^2}{2}\dddot a + 2x\,\dddot k + 2y\,\dddot l - \dot f. \end{aligned} \tag{2}$$

Анализ результатов групповой классификации показывает невозможность линеаризации системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном с помощью точечной замены переменных.

Гидродинамические законы определяются тройкой функций $P(x, y, t, u, v, \eta)$, $Q(x, y, t, u, v, \eta)$, $R(x, y, t, u, v, \eta)$, тождественно удовлетворяющих уравнению

$$D_x(P) + D_y(Q) + D_t(R) = 0$$

на решениях системы уравнений (1).

Получено, что гидродинамические законы сохранения имеют вид:

$$P = \Big(\eta + h(x, y)\Big)^2 \left(u\, a(t) - \frac{\dot{a}}{2}\, x - By + k(t)\right) + u\, R\,,$$

$$Q = \Big(\eta + h(x, y)\Big)^2 \left(v\, a(t) - \frac{\dot{a}}{2}\, y + Bx + l(t)\right) + v\, R,$$

$$R = \Big(\eta + h(x, y)\Big)\Big(\frac{x^2 + y^2}{2}\, \ddot{a} - 2x\, k - 2y\, \dot{l} + 2u\, k(t) + 2v\, l(t) +$$

$$+ 2B(xv - yu) - \dot{a}(xu + yv) + a(t)\big(u^2 + v^2 + \eta - h(x, y)\big) + f(t)\Big),$$

где функции $a(t)$, $k(t)$, $l(t)$, $f(t)$ и постоянная B определяются из классифицирующего уравнения (2) при $C = 0$.

Показано, что система уравнений (1) обладает не более, чем девятимерным пространством гидродинамических законов сохранения.

Список литературы

[1] *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959.

[2] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.
Email: aksenov@mech.math.msu.su

[2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.
Email: Konstantin.Druzhkov@gmail.com

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИКВАТЕРНИОННЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

АЛЕКСЕЕВА Л.А.

Рассматриваются краевые задачи для бикватернионных волновых (биволновых) уравнений, которые являются бикватернионными обобщеними уравнений Максвелла и Дирака [1-3]. В работе [4] автором исследованы нестационарные решения этих уравнений и их свойства. Здесь рассматриваются их стационарные решения с фиксированной частотой колебаний. Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнения для биамплитуд колебаний, компоненты которых являются обобщенными функциями медленного роста. С использованием метода обобщенных функций построены обобщенные решения биволнового уравнения в ограниченной области по известным значениям бикватерниона на границе области и даны их регулярные интегральные представления для внутренних точек. Построено интегральное представление характеристической функции множества через фундаментальное решение этого уравнения.

Эти формулы являются аналогами известных формул Грина и Гаусса для эллиптических уравнений, их бикватернионным обобщением. На их основе построены разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения для решения стационарных и периодических по времени краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP05132272, 2018-2020 гг.

Список литературы

[1] Шпилькер. Г.Л. Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла//ДАН СССР , 272 (1983), № 6, 1359-1363

[2] Adler S.L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. New York: Oxford University Press, 1995.

[3] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis, Clifford algebras and applications, 7 (2012), no 1, pp.19-39.

[4] Алексеева Л.А. Бикватернионные волновые уравнения и свойства их обобщенных решений// Дифференциальные уравнения, 57(2021), № 5, с. 614–624.

Институт математики и математического моделирования Алматы, Казахстан. Email: alexeeva@math.kz

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

АЛИЕВ А.Р.[1], МУРАДОВА Н.Л.[2]

Пусть A - самосопряженный положительно-определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Обозначим через H_θ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т.е.

$$H_\theta = Dom\left(A^\theta\right), \ \theta \geq 0, \ (x,y)_\theta = (A^\theta x, A^\theta y), \ x,y \in Dom(A^\theta).$$

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$\left(-\frac{d}{dt}+A\right)\left(\frac{d}{dt}+A\right)^3 u\left(t\right)+\sum_{j=1}^{3} A_j u^{(4-j)}\left(t\right)=f\left(t\right), t\in R, \tag{1}$$

где $A_j, \ j=1,2,3,$ - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы в H, $f\left(t\right) \in W_2^1\left(R;H\right), u\left(t\right) \in W_2^5\left(R;H\right)$, $R=(-\infty,+\infty)$. Здесь под $W_2^m\left(R;H\right)$ для целых чисел $m \geq 1$ понимаем гильбертово пространство (см. [1])

$$W_2^m\left(R;H\right)=\left\{u\left(t\right): \frac{d^m u\left(t\right)}{dt^m}\in L_2\left(R;H\right), \ A^m u\left(t\right)\in L_2\left(R;H\right)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^m(R;H)}=\left(\left\|\frac{d^m u}{dt^m}\right\|^2_{L_2(R;H)}+\|A^m u\|^2_{L_2(R;H)}\right)^{1/2},$$

где через $L_2\left(R;H\right)$ обозначено гильбертово пространство вектор-функций $f\left(t\right)$, определенных в R, со значениями в H и для которых

$$\|f\|_{L_2(R;H)}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|f\left(t\right)\|_H^2 dt\right)^{1/2}<+\infty.$$

Производные понимаются в смысле теории распределений (см. [1]).

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1. *Пусть A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H и операторы $A_j \in L\left(H_j,H\right)\cap L\left(H_{j+1},H_1\right)$, $j=1,2,3,$ причем выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{3} max\left\{\left\|A_{4-j}A^{-(4-j)}\right\|_{H\to H}, \ \left\|AA_{4-j}A^{-(5-j)}\right\|_{H\to H}\right\} n_j<1,$$

где
$$n_j = \frac{1}{16} j^{j/2} (4-j)^{(4-j)/2}, \ j = 1, 2, 3.$$
Тогда для любого $f(t) \in W_2^1(R; H)$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u(t) \in W_2^5(R; H)$.

Через $L(X, Y)$ традиционно понимается множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в другое гильбертово пространство Y.

Список литературы

[1] *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[1]Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Азербайджан. Email: alievaraz@yahoo.com

[2]Нахичеванский институт учителей, Азербайджан. Email: nazilamuradova@gmail.com

ОБ ОЦЕНКАХ МЕЙЕРСА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ

АЛХУТОВ Ю.А.[1], ЧЕЧКИН Г.А.[2]

Работа посвящена оценкам решений задачи Зарембы для равномерно эллиптического оператора второго порядка дивергентного вида с симметричными измеримыми коэффициентами вида
$$\mathcal{L}u := \mathrm{div}(a(x)\nabla u)$$
в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Рассматривается задача
$$\mathcal{L}u = \mathrm{div} f \text{ в } D, \ u = 0 \text{ на } F, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial D \setminus F, \tag{1}$$
где $f \in L_2(D)$, $F \subset D$ – замкнутое множество, а $\partial u/\partial \nu$ означает внешнюю конормальную производную.

Ниже $B_r^{x_0}$ — открытый n-мерный шар радиуса r с центром в точке x_0, $mes_{n-1}(E)$ – (n-1)-мерная мера Лебега множества E, а $C_p(K)$ означает p-емкость компакта K. Дополнительно будем считать, что $p = 2n/(n+2)$ при $n > 2$ и $p = 3/2$ при $n = 2$. Предполагается выполнение одного из следующих условий, выполненных для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \le r_0$:
$$C_p(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \ge c_0 r^{n-p} \text{ или } mes_{n-1}(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \ge c_0 r^{n-1}. \tag{2}$$

в которых положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Если $f \in L_{2+\delta_0}(\Omega)$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(n, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int\limits_D |f|^{2+\delta} \, dx,$$

где C зависит только от δ_0, размерности пространства n, величин c_0 и r_0 из (2)*, постоянных эллиптичности матрицы коэффициентов эллиптического оператора, а также от характеристик липшицевой области D.*

Второе условие из (2) в терминах меры является более сильным, чем условие из (2) в терминах емкости, то есть из условия в терминах емкости нельзя сделать вывод о справедливости аналогичного условия в терминах меры.

Вопрос о повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений является классическим и восходит к работе [1], в которой рассмотрена задача Дирихле для линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами на плоскости. Позже в многомерном случае и уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2].

Первый автор поддержан грантом РНФ номер 22-21-00292.

Список литературы

[1] *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб., Т. 43(85) (4, 1957). С. 451–503.

[2] *Meyers N. G.* An L^p–estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. T. 17, (3, 1963). P. 189–206.

[1]Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Россия. Email: yurij-alkhutov@yandex.ru

[2]Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: gregory.chechkin@gmail.com

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ СЕРЫХ ТЕЛ С ПОЛУПРОЗРАЧНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

АМОСОВ А.А.

К настоящему времени достаточно подробно изучена разрешимость различных постановок стационарных и нестационарных краевых задач сложного (радиационно - кондуктивного) теплообмена в системах, состояших либо только из непрозрачных либо только из полупрозрачных для излучения тел. Обзор соответствующих математических работ за период с 1937 г. по 2020 г. можно найти в [1]. В то же время задачи радиационно - кондуктивного теплообмена в системах, состоящих как из непрозрачных, так и из полупрозрачных для излучения тел, остаются пока недостаточно исследованными. В этом направлении единственными, по мнению автора, является статьи [1] – [4].

В докладе рассматривается стационарная нелинейная краевая задача, описывающая сложный (радиационно-кондуктивный) теплообмен в системе трехмерных серых тел, содержащих полупрозрачные для излучения включения. Искомыми функциями являются абсолютная температура $u(x)$ и интенсивность излучения $I(\omega, x)$. Процесс сложного теплообмена описывается системой, состоящей из нелинейного уравнения теплопроводности, интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и интегрального уравнения, отражающего теплообмен излучением между серыми поверхностями. Уравнения дополняются краевыми условиями, описывающими отражение и преломление излучения на границах раздела сред.

В [4] установлена однозначная разрешимость этой задачи. Доказана теорема сравнения. Показано, что увеличение степени суммируемости данных приводит к улучшению свойств решений, в том числе – к экспоненциальной суммируемости и ограниченности.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00033).

Список литературы

[1] *A. Amosov.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, Vol. 44, № 13, pp. 10703 - 10733.

[2] *A. Amosov.* Unique solvability of a stationary radiative–conductive heat transfer problem in a semitransparent body with absolutely black inclusions // Z. Angew. Math. Phys., 2021, Vol. 72, Article number:104.

[3] *A. Amosov*. Nonstationary Radiative–Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics, 2021, 9(13), 1471.

[4] *A. A. Amosov*. Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // J. Math. Sci. (United States), 2021, Vol. 255, issue 4, pp. 353 – 388.

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Россия. Email: AmosovAA@mpei.ru

О ЗНАКОПОСТОЯНСТВЕ ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

АНУЧИНА Ю.А.

Краевые задачи на графах рассматривались в работах [1], [2], [3].

Пусть на отрезке $[0,l]$, $l>0$, вещественной оси заданы два набора A_n и B_m, состоящие соответственно из n различных точек a_k, $k=\overline{1,n}$, и из m различных точек b_k, $k=\overline{1,m}$. Полагаем, что множества A_n и B_m не пересекаются и $0<a_1<a_2<\ldots<a_n<l$, $0<b_1<b_2<\ldots<b_m<l$. Исключим из интервала $(0,l)$ точки множества A_n и B_m. Полученное объединение интервалов обозначим через $\Im$. Для неотрицательных на отрезке $[0,l]$ функций $p_j\in C^{2-j}[0,l]$, $j=\overline{0,2}$; $\inf\limits_{x\in[0,l]} p_0(x)>0$ и произвольной функции $f\in C(\Im)$ рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$(p_0(x)\,u''(x))''-(p_1(x)\,u'(x))'+p_2(x)\,u(x)=f(x) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0)=u'(0)=u(l)=u'(l)=0 \tag{2}$$

и условиях согласования двух видов: в каждой точке a_k заданы условия

$$\begin{cases} u^{(j)}(a_k+0)=u^{(j)}(a_k-0), & j=\overline{0,2},\\ u'''(a_k+0)-u'''(a_k-0)=-\gamma_k u(a_k), \end{cases} \tag{3}$$

где γ_k — неотрицательная константа, а в каждой точке b_k заданы условия

$$\begin{cases} u(b_k+0)=u(b_k-0),\\ u^{(j)}(b_k+0)=u^{(j)}(b_k-0), \quad j=1,2. \end{cases} \tag{4}$$

Рассматриваемая краевая задача (1)-(4) при соответствующем подборе коэффициентов дифференциального уравнения моделирует малые упругие деформации стержня с промежуточными закреплениями [4]. Первый вид условий согласования (3) соответствует соединению стержня с пружиной, закрепленной на неподвижной опоре, а второй вид условий согласования (4) – шарнирному закреплению.

Получено представление функции Грина через функцию Грина другой краевой задачи, у которой количество исключенных внутренних точек меньше на единицу, что позволяет построить функцию Грина, используя известные представления функции Грина краевых задач. Построены графики функции Грина и ее областей знакопостоянства с использованием пакета прикладных математических программ при различном количестве исключенных точек, а также при различных видах условий согласования. В ряде случаев получен критерий положительности функции в терминах ограничений на условия согласования. Рекуррентные формулы представления функции Грина получены впервые. Результаты работы частично изложены в статьях [5], [6].

Список литературы

[1] *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений на графе. В.: Изд. дом ВГУ, 2015.

[2] *Завгородний М. Г.* Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 446–456.

[3] *Покорный Ю. В.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004.

[4] *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* Краевые задачи, описывающие процессы сетевых технических систем // Исследования по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям. — 2010. — Т. 4. — С. 48–64.

[5] *Завгородний М. Г., Майорова С. П., Анучина Ю. А.* О функции Грина многоопорной балки // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2019. –№1. –С.110-116.

[6] *Анучина Ю. А., Завгородний М. Г.* О функции Грина краевой задачи, заданной на цепочке интервалов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронеж. зимн. мат. школа. – В.: Изд. дом ВГУ, 2019. – С. 21–22.

Воронежский государственный университет, Россия.
Email: anuchina@math.vsu.ru

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРЕДЕЛЬНОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

АУЗЕРХАН Г.С.

Рассмотрим звездный граф Г, состоящий из множества вершин и множества дуг. Вершины графа нумеруем натуральными числами от 0 до $m+1$.

Дуги графа нумеруются через $e_1, ..., e_{m+1}$. На каждой дуге e_j рассматривается вектор-функция

$$Y_j(x_j) = [y_{1j} \quad y_{2j} \quad y_{3j}]^T, x_j \in e_j$$

которая удовлетворяет следующей системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
l_{1j}(Y_j) = \frac{d^2}{dx_j^2}(\mu_j(x_j)a_j(x_j)\frac{d^2y_{1j}(x_j)}{dx_j^2})+ \\
+\frac{d^2}{dx_j^2}(\mu_j(x_j)b_j(x_j)\frac{d^2y_{2j}(x_j)}{dx_j^2}) - \frac{d^2}{dx_j^2}(\mu_j(x_j)d_j(x_j)\frac{d^2y_{3j}(x_j)}{dx_j^2}) = g_{1j}(x_j), \\
l_{2j}(Y_j) = \frac{d^2}{dx_j^2}(\mu_j(x_j)b_j(x_j)\frac{d^2y_{1j}(x_j)}{dx_j^2})+ \\
+\frac{d^2}{dx_j^2}(\mu_j(x_j)c_j(x_j)\frac{d^2y_{2j}(x_j)}{dx_j^2}) - \frac{d^2}{dx_j^2}(\mu_j(x_j)f_j(x_j)\frac{d^2y_{3j}(x_j)}{dx_j^2}) = g_{2j}(x_j), \\
l_{3j}(Y_j) = \frac{d}{dx_j}(\mu_j(x_j)d_j(x_j)\frac{d^2y_{1j}(x_j)}{dx_j^2})+ \\
+\frac{d}{dx_j}(\mu_j(x_j)f_j(x_j)\frac{d^2y_{2j}(x_j)}{dx_j^2}) - -\frac{d}{dx_j}(\mu_j(x_j)\frac{d^2y_{3j}(x_j)}{dx_j^2}) = g_{3j}(x_j)
\end{gathered} \tag{1}$$

Система (1) линейных дифференциальных уравнений состоит из трех дифференциальных уравнении разных порядков описывает совместные поперечные, продольные колебания стержней соединенных в одном узле. Если диаметр сечения $\omega(z)$ считать малым, тогда система (1) распадается три последовательно решаемые системы. В силу малости система (1) примет вид

$$-\frac{d}{dz}(\mu(z)(\frac{dw_3(z)}{dz})) = F_3 \tag{2}$$

и

$$\frac{d^2}{dz^2}(\mu(z)(b^2(z)) - a(z)c(z)\frac{d^2w_2(z)}{dz^2}) = F_2 \tag{3}$$

Во многих инженерных расчетах считается, что движения разделяются: поперечные колебания не влияют на продольные и наоборот. Однако подобные разделение движений стержня не всегда оправдывается. Таким образом, в общем случае система (1) не всегда распадается на уравнения типа (2) и (3).

В докладе выявлены условия сопряжения в соединительном узле и соответствующие условия закрепления в граничных вершинах, котором соответствует корректно разрешимой задачи для системы (1).

Доклад подготовлен совместно с Б.Е. Кангужиным и при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК грант №AP 08855402 "Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений на геометрических графах и их применения при расчетах соединений упругих тонких стержней ".

Казахский национальный университет имени аль–Фараби.Казахстан.
Email: auzerhanova@gmail.com

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЭРГОДИЧЕСКИЕ ВЫСШИЕ ИНВАРИАНТЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ II

АХМЕТЬЕВ П.М.

В магнитной гидродинамике инварианты магнитных полей имеют большое значение. Речь идет о магнитном поле в области $\Omega \subset R^3$ проводящей жидкости, магнитное поле направлено по касательной к границе области $\partial\Omega$, инварианты магнитных полей ищутся относительно группы сохраняющих объем диффеоморфизмов, неподвижных в некоторой окрестности бесконечности.

По теореме Арнольда определен асимптотический эргодический инвариант Хопфа, который мы обозначим через $\chi_{\mathbf{B}}$. Инвариант Хопфа является функцией на декартовом квадрате Ω^2, смысл которого состоит в том, что выпускаются магнитные линии из точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ и почти для любой пары $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ вычисляется асимптотический коэффициент зацепления $\chi_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Как отмечено в [1], сноска на стр. 163, в конструкции $\chi_{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ имеется трудность. Это относится лишь к случаю магнитных полей необщего положения. Здесь же предлагается провести доказательство существования в полной общности.

Более гибкое определение гауссова зацепления магнитных линий (раздел 4.3 [1]) можно пытаться провести отказавшись от понятия „системы коротких путей“. Трудность, на взгляд автора, состоит в доказательстве того, что эргодическую теорему Биркгофа для дискретной аппроксимации магнитного потока можно применить также к самому магнитному потоку. При тех или иных дополнительных предположениях, например, при отсутствии нулей магнитного поля в области Ω (предположение о магнитной трубке), указанная трудность преодолевается. Построения мы проводим лишь в предположении о магнитной трубке.

В докладе [2] автор анонсировал существование высших (т.е. не сводящихся к коэффициентам зацепления) асимптотических эргодических инвариантов зацеплений. Впоследствии, при публикации доклада [3] условие эргодичности (существование плотности инварианта магнитных линий) ослаблено до условия слабой эргодичности, что, конечно, нежелательно, но допустимо для приложений. Конечно, можно надеяться на то, что эргодические средние высших инвариантов магнитных линий корректно почти всюду определены для магнитных полей общего вида в области Ω.

Мы вернемся к построению и выполним его в первоначальной формулировке для инварианта M_3, следуя [4]. Для инварианта M_5 ожидается приложение, см. [5], но этот вопрос до конца не исследован.

Работа выполнена при поддержке Russian Science Foundation (project 21-11-00010).

Список литературы

[1] В.И.Арнольд, Б.А.Хесин „Топологические методы в гидродинамике“, издание второе, дополненное, Москва МЦНМО (2020).

[2] *Ахметьев П. М.*, Асимптотические эргодические высшие инварианты зацеплений, Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль 29-4 июля (2012), Тезисы докладов, стр.26.

[3] *P.M. Akhmet'ev*, On Arnold's problem on higher analogs of the asymptotic Hopf invariant, J. Math. Sci. 208(1) (2015) 24–35.

[4] *P. M.Akhmet'ev*, On a higher integral invariant for closed magnetic lines, revisited, Journal of Geometry and Physics 170 (2021) 104379.

[5] *П. М. Ахметьев*, Топологический смысл наклона колмогоровского спектра магнитной турбулентности, ТМФ, 209:2 (2021), 351–366.

Московский институт электроники и математики им. А.Н.Тихонова, Департамент прикладной математики. Email: pmakhmet@mail.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ НА ПЛОСКОСТИ

БАДЕРКО Е.А.[1], ЧЕРЕПОВА М.Ф.[2]

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных (по пространственной переменной) параболических по Петровскому систем 2–го порядка с переменными коэффициентами в областях с негладкими боковыми границами. Установлена единственность классических решений указанных задач в ограниченной области Ω с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, «клювы», в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$

функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$ вместе с производной по пространственной переменной.

Работа второго автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00033).

Список литературы

[1] *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами. // Доклады Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы управления. 2020. Т. 494. С. 5–8.

[2] *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем на плоскости. // Дифференц. уравнения, 2021, т. 57, № 8, с. 1039–1048.

[3] *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости. // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. №2. С.198–208.

[1]Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. Email: baderko.ea@yandex.ru

[2]Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Россия.
Email: cherepovamf@mpei.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

БАЛАНДИН А.С.

В работе изучаются асимптотические свойства решений дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) - a\dot{x}(t-h) = -bx(t) + cx(t-h), \quad t \geqslant 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0), \end{gathered} \tag{1}$$

возникающего в различных прикладных задачах: динамика популяции клеток, движение плоских упругих плит с учетом трения, исследование дефектов с помощью ультразвука. С другой стороны, это уравнение, несмотря на простоту, обладает большим разнообразием асимптотических свойств решений и поэтому интересно также с теоретической точки зрения [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (1) установлен в [7], где построена область устойчивости в трехмерном пространстве коэффициентов. Отметим, что необходимым условием экспоненциальной устойчивости для (1) является выполнение неравенства $|a| < 1$; в этом случае потеря экспоненциальной устойчивости происходит за счет появления стационарных или периодических решений. Асимптотическая устойчивость, не совпадающая с экспоненциальной, отсутствует.

При $|a| > 1$ уравнение (1) имеет неограниченные решения, значит, уравнение неустойчиво. Наиболее сложным является случай $|a| = 1$. Причина в том, что здесь характеристическая функция уравнения (1) может иметь на комплексной плоскости последовательность нулей, неограниченно приближающуюся к мнимой оси, либо лежащую на мнимой оси. Эти случаи потребовали отдельного изучения. В работах [7, 8] приведены эффективные условия, при которых уравнение (1) обладает свойством асимптотической устойчивости, не совпадающей с экспоненциальной; установлена также равномерная устойчивость в случае наличия у характеристической функции бесконечного множества чисто мнимых корней.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Список литературы

[1] *Ожиганова И.А.* Определение области асимптотической устойчивости для дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 1. С. 52–62.

[2] *Громова П.С., Зверкин А.М.* О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная и неограниченная на числовой оси функция-решение уравнения с отклоняюпщмся аргументом // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 10. С. 1774–1784.

[3] *Junca S., Lombard B.* Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation // J. Differential Equations. 2014. V. 256. Issue 7. P. 2368-2391.

[4] *Čermák J., Hrabalová J.* Delay-dependent stability criteria for neutral delay differential and difference equations // Discrete & Continuous Dynamical Systems. 2014. V. 34 (11). P. 4577-4588.

[5] *Liao X., Mu N.* Stability of a neutral delay neuron system in the critical case // 2014 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), 2014, pp. 1221-1224.

[6] *Liao X.* Asymptotic stability of a class of neutral delay neuron system in a critical case // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2015. V. 26. Issue 12. P. 3320-3325.

[7] *Баландин А.С., Малыгина В.В.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа // Мат. тр. 2020. Т. 23, № 2. С. 3–49.

[8] *Малыгина В.В., Баландин А.С.* Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. №1. С. 106-116.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия. Email: balandin-anton@yandex.ru

ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЕРРОНА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

БАРАБАНОВ Е.А.[1], БЫКОВ В.В.[2]

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, через $\mathcal{M}_n$ — его подкласс, коэффициенты систем которого ограничены на полуоси, а через $x(\cdot;\xi)$ — решение системы (1) с начальным вектором $x(0;\xi) = = \xi \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ расширенную числовую прямую с естественным порядком и порядковой топологией.

Нижним показателем Перрона ненулевого решения $x(\cdot;\xi)$ системы (1) называется [1] величина

$$\pi[x(\cdot;\xi)] = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x((t;\xi))\|, \tag{2}$$

а функция начального вектора $\pi_A \colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot;\xi)]$, – *показателем Перрона* системы (1). Нижние показатели Перрона представляют собой один из примеров многочисленных асимптотических характеристик – функционалов, определенных на решениях дифференциальных систем и отражающих те или иные качественные или асимптотические их свойства. Важнейший из них – характеристический показатель Ляпунова (его определение получается заменой в (2) нижнего предела верхним). Приведем некоторые известные свойства показателя Перрона, показывающие его принципиальные отличия от показателя Ляпунова.

А.М. Ляпуновым установлено, что число различных показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ не превосходит ее размерности n. О. Перрон обнаружил [1], что для нижних показателей это утверждение не верно. Для диагональных систем из $\mathcal{M}_n$ количество различных значений показателя Перрона не превосходит $2^n - 1$ [2] и может быть любым таким натуральным числом [3]. В общем случае множество P является множеством значений показателей Перрона некоторой системы из $\mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда P — ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань [4].

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального n класса функций $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$. Известно, что $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ — подкласс второго, но не первого, класса Бэра [5].

В [6] доказано, что для любого $n \geq 2$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ содержит все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad c \in \mathbb{R}^1 \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{3}$$

Полное описание класса $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ для любого $n \geq 2$ дает следующая

Теорема. *Функция $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ при $n \geqslant 2$, если и только если она удовлетворяет условию (3) и для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([-\infty, r]\big)$ является G_δ-множеством. Класс $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ состоит из всех постоянных функций $\mathbb{R}^1 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Список литературы

[1] *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme. Math. Zeitschr. **31** (1930), No. 5, 748–766.

[2] *Н.А. Изобов* О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы. Дифференц. уравнения. **1** (1965), No. 4, 469–477.

[3] *Барабанов Е. А.* Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы. Докл. АН БССР. **26** (1982), No. 12, 1069–1072.

[4] *Барабанов Е. А.* Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы. Дифференц. уравнения. **22** (1986), No. 11, 1843–1853.

[5] *Барабанов Е. А.* Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона. Докл. АН БССР. **34** (1990), No. 3, 200–203.

[6] *Гаргянц А. Г.* К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами. Дифференц. уравнения. **53** (2017), No. 11. С. 1567.

[1]Институт математики НАН Беларуси, Беларусь.
Email: barabanove58@gmail.com

[2]Московский государственный университет, Россия.
Email: vvbykov@gmail.com

АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МОДЕЛИ СОМОВА МАГНИТНОГО ПЕРЕСОЕДИНЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

БЕЗРОДНЫХ С.И.[1], ВЛАСОВ В.И.[2]

Возникающий в плазме Солнечной короны эффект магнитного пересоединения, заключающийся в изменении конфигурации магнитного поля с существенным выделением энергии, играет важную роль в механизме Солнечных вспышек [1]. Магнитное поле в области пересоединения можно рассматривать как плоское, т.е. $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$, а величину $\mathcal{F} = B_x - iB_y$ — как аналитическую функцию переменного $z = x + iy$.

Модель данного эффекта, предложенная Б.В. Сомовым [1], сводит вычисление магнитного поля к задаче Римана — Гильберта в односвязхной области $\mathfrak{X}$, представляющей собой внешность системы разрезов $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$. Здесь Γ_0 — отрезок $[-R, R]$ вещественной оси — изображает токовый слой (такой же, как в модели С.И. Сыроватского [2] этого эффекта). К его концам присоединены остальные четыре разреза длиной r, изображающие МГД–ударные волны. Эти разрезы Γ_j, $j = \overline{1,4}$, расположены зеркально–симметрично относительно декартовых осей, причем разрез в первом квадранте наклонен к оси x под углом $\pi\alpha \leq \pi/4$. В модели Сомова принимается, что на разрезе Γ_0 нормальная компонента B_n магнитного поля равна нулю, а на разрезах Γ_j, $j = \overline{1,4}$, она постоянна и равна заданной величине $\beta > 0$. Выражая B_n через $\mathcal{F}$ и комплексную единичную нормаль ν по формуле $B_n(z) = \mathrm{Re}\left[\nu(z)\,\mathcal{F}(z)\right]$, получаем из этих условий требуемую задачу Римана — Гильберта

$$\mathrm{Re}\big[\nu(z)\mathcal{F}(z)\big] \,=\, 0, \quad z \in \Gamma_0; \qquad \mathrm{Re}\big[\nu(z)\mathcal{F}(z)\big] \,=\, \beta, \quad z \in \Gamma\,, \tag{1}$$

в которой еще предполагается, что поле имеет линейный рост на бесконечности, т.е.

$$\mathcal{F}(z) \,\sim\, -i\,\mu\,z, \qquad z \to \infty\,, \tag{2}$$

где $\mu > 0$ — заданный параметр модели. Следует отметить, что модель Сыроватского [2] содержит токовыйт слой, но не не включачет ударных волн, тогда как модель Петчека [5], напротив, содержит бесконечно длинные ударные волны.

С помощью методов, разработанных в [3] и [4], проведено асимптотическое исследование задачи (1), (2) как при укорочении фронта ударных волн, т.е. при $\rho := r/R \to 0$, так и при их бесконечном вытягивании, т.е. при $\rho \to \infty$. Оно показало, что при $\rho \to 0$ и одновременном согласованном порядка $\rho^{-1/2}$ возрастании параметра β из условия (1), а также фиксированных остальных параметрах R, α, μ модели поле Сомова превращается в поле Сыроватского.

Также было установлено, что если $\rho \to \infty$, а коэффициент μ в (2) согласованно уменьшается по закону $\mu(\rho) = \mu_0\, \rho^{(4\alpha-1)/(2(1-2\alpha))}$, $\mu_0 = \text{const}$, а остальные параметры модели (R, α, β) фиксированы, то при $0 < \alpha < 1/4$ предельное поле Сомова совпадает с полем Петчека. Следовательно, модели Сыроватского и Петчека можно рассматривать как предельные случаи модели Сомова.

Список литературы

[1] *Somov B. V.* Plasma Astrophysics. Part II, Reconnection and Flares. N.Y.: Springer SBM, 2016.

[2] *Сыроватский С. И.* О возникновении токовых слоев в плазме с вмороженным сильным магнитным полем // Журнал эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 60. С. 1721–1741.

[3] *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.

[4] *Безродных С. И., Власов В. И.* Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Журнал выч. математики и мат. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 1904–1953.

[5] *Petschek H. E.* Magnetic field annihilation // AAS-NASA Symposium "The Physics of Solar Flares", 1963. — NASA Spec. Publ., SP-50, 1964, P. 425–439.

[1]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Россия. Email: sbezrodnykh@mail.ru

[2]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Россия. Email: vlasov@ccas.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ВЫРОЖДЕНИЕМ

БЖЕУМИХОВА О.И.

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T. Далее, пусть $\varphi(x)$ есть заданная инволюция отрезка $[0, 1]$, $a = const$, $b(x, t)$ и $f(x, t)$ есть заданные определенные на множестве $\overline{Q}$ функции.

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - a u_{xx}(\varphi(x), t) + b(x, t)u(x, t) = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \qquad t \in (0, T),$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Представленная задача в случае $a = 0$ достаточно хорошо изучена (см., например, работы [1, 2] и библиографию в них).

В работе для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с инволюцией в старших производных исследована разрешимость начально-краевой задачи в пространствах Соболева. Для изучаемой начально-краевой задачи методом регуляризации и методом продолжения по параметру [3] с помощью априорных оценок доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Список литературы

[1] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[2] *Кожанов А. И.* Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений// Сибирские электронные математические известия. 2021. Т. 18. № 1. С. 43-53.

[3] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х.М. Бербекова, Россия. Email: bzhoksana@gmail.com

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

БОНДАРЕНКО Н.П.

Доклад посвящен обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов n-го порядка ($n \geq 2$) с коэффициентами-распределениями. Рассматриваются операторы, порожденные следующими дифференциальными выражениями при $n = 2m$:

$$\ell_{2m}(y) := y^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k(\tau_k^{(k)}(x)y^{(m-k)})^{(m-k)}$$
$$+ \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}\left((\sigma_k^{(k)}(x)y^{(m-k-1)})^{(m-k)} + (\sigma_k^{(k)}(x)y^{(m-k)})^{(m-k-1)}\right), \quad (1)$$

где

$$\tau_1, \ldots, \tau_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1} \in L_2(0,1),$$

и при $n = 2m + 1$:

$$\ell_{2m+1}(y) := y^{(2m+1)} + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}(\tau_k^{(k)}(x)y^{(m-k)})^{(m-k)}$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \left((\sigma_k^{(k)}(x)y^{(m-k-1)})^{(m-k)} + (\sigma_k^{(k)}(x)y^{(m-k)})^{(m-k-1)}\right), \quad (2)$$

где

$$\tau_1, \dots, \tau_m, \sigma_0, \dots, \sigma_{m-1} \in L_1(0,1).$$

Операторы определяются в соответствии с регуляризационным подходом, предложенным в [1, 2].

Для дифференциального выражения $\ell_n(y)$ построена матрица Вейля-Юрко $M(\lambda)$, аналогичная матрице, используемой в [3] для дифференциальных операторов высших порядков с регулярными коэффициентами. Рассматривается обратная задача, состоящая в восстановлении коэффициентов $\{\tau_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ по $M(\lambda)$. Доказана теорема единственности решения обратной задачи (см. [4]). Полученные результаты обобщают результаты [5] для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами из класса $W_2^{-1}(0,1)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/

Список литературы

[1] *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 788–793.

[2] *Mirzoev K. A., Shkalikov A. A.* Ordinary differential operators of odd order with distribution coefficients, arXiv:1912.03660 [math.CA].

[3] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

[4] *Bondarenko N. P.* Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients // Mathematics. 2021. Vol. 9 , no. 22. Article ID 2989.

[5] *Hryniv R. O., Mykytyuk Y. V.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials. II. Reconstruction by two spectra // North-Holland Math. Stud. 2004. Vol. 197. P. 97–114.

Саратовский государственный университет, Россия.
Email: bondarenkonp@info.sgu.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ С ТРЕТЬИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦАХ ОТВЕРСТИЙ

БОРИСОВ Д.И.[1], МУХАМЕТРАХИМОВА А.И.[2]

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область, ε – малый положительный параметр и $\eta = \eta(\varepsilon)$ – функция, удовлетворяющая $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$. Положим: $S := \{x : x_n = 0\}$, $\square := \Big\{x : -\frac{b_i}{2} < x_i < \frac{b_i}{2}, i = 1, \ldots, n-1\Big\}$, $\Pi := \square \times \mathbb{R}$, $b_i > 0$. Обозначим через $M \in \Pi$ фиксированную точку и через ω фиксированное ограниченное множество. В окрестности S выберем точки $M_k^\varepsilon = \varepsilon(M_k + M)$, $M_k := (b_1 k_1, \ldots, b_{n-1} k_{n-1})$, $k := (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ такие, что $\operatorname{dist}(M_k^\varepsilon, S) \leqslant R_0 \varepsilon$, где $R_0 > 0$. Обозначим: $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus \theta^\varepsilon$, $\theta^\varepsilon := \bigcup\limits_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} \big\{x : (x - M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1} \in \omega\big\}$.

Пусть $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$ – функции, заданные в Ω и удовлетворяющие: $A_{ij}, A_i \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0 \in L_\infty(\Omega)$, $A_{ij} = A_{ji}$, $\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c_0|\xi|^2$, $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1 \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $c_0 > 0$. Предполагаем, что $A_{ij} = 1$, $A_j = 0$, $A_i = 0$ при $|x_n| \leqslant \tau_0$. Пусть $a = a(u)$ – бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая $a(0) = 0$, $|\frac{\partial a}{\partial u}| \leqslant a_0$, где a_0 – некоторая константа. Обозначим:

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0$$

Рассматривается краевая задача:

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_\varepsilon = f,\ x \in \Omega^\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0,\ x \in \partial\Omega, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathrm{n}} + a(\cdot, u_\varepsilon) = 0,\ x \in \partial\theta^\varepsilon,$$

где $f \in L_2(\Omega) \cap W_2^q(\Omega_{\tau_0}^+) \cap W_2^q(\Omega_{\tau_0}^-)$, $\Omega_{\tau_0}^\pm := \{x : 0 < \pm x_n < \tau_0\}$, $q \in \mathbb{N}$, λ – вещественное число, $\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}} = \sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij} \cos(\nu, Ox_i) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum\limits_{j=1}^n \overline{A_j} \cos(\nu, Ox_j)$, $\cos(\nu, Ox_i)$ – косинус угла между осью Ox_i и единичной нормалью ν к $\partial\theta^\varepsilon$, направленной внутрь множества θ^ε. В работе рассматриваются два случая: 1) $a \equiv 0$ или 2) $\eta(\varepsilon) \to 0$.

Наш основной результат утверждает, что асимптотика функции u_ε в $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(\xi, x, \eta) = \chi^\varepsilon\Big(\frac{x_n}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\Big) u_\varepsilon^{ex}(x, \eta) + \Big(1 - \chi^\varepsilon\Big(\frac{x_n}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big) u_\varepsilon^{in}(\xi, x', \eta) + O(\varepsilon^{\frac{N}{2}}),$$

где $u^{ex}_\varepsilon(x,\eta) = \sum\limits_{m=0}^{N} \varepsilon^m u_m(x,\eta)$, $u^{in}_\varepsilon(\xi,x',\eta) = \sum\limits_{m=0}^{N} \varepsilon^m v_m(\xi,x',\eta)$, N – произвольное натуральное число, $\chi = \chi(x_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $|x_n| < 1$ и единице при $|x_n| > 2$, $\xi = (\xi',\xi_n) = (x'\varepsilon^{-1}, x_n\varepsilon^{-1})$, функции u_0 – решение задачи

$$(\mathcal{L}-\lambda)u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1}$$

функции u_m – решения задачи (1) с $f=0$, функции v_m – решения задач

$$-\Delta_\xi v_m = f_m \quad \text{в } \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \quad \frac{\partial v_m}{\partial \nu_\xi} = \psi_m \quad \text{на } \partial\breve{\omega}^\eta, \quad f_0 = 0, \quad \psi_0 = 0,$$

$$f_m := \frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2} f}{\partial x_n^{m-2}}(x',0) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial \xi_i \partial x_i} + (\Delta_{x'}+\lambda)v_{m-2},$$

$$\psi_m := -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_i}\nu_i - L_{m-1}(v_1,\ldots,v_{m-1}),$$

где $\breve{\omega}^\eta = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}} \big\{\xi : \eta^{-1}(\xi - M_k - M) \in \omega\big\}$, ν_ξ – единичная нормаль к ω^η, направленная внутрь ω^η, ν_i – компоненты вектора ν_ξ, L_m – некоторые фиксированные полиномы.

[1]Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, Россия. Email: borisovdi@yandex.ru

[2]Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, Россия. Email: albina8558@yandex.ru

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ МОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

БОРОВСКИХ А.В.[1], ПЛАТОНОВА К.С.[2]

Одной из основных математических проблем, связанных с моделями кинетической теории, является проблема замыкания моментной системы, восходящая к работам Дж.К. Максвелла. Идея нашего подхода к решению этой проблемы состоит в том, чтобы в основание выбора замыкания положить групповые свойства дифференциальных уравнений. Речь идет о том, чтобы, определив группу симметрий кинетического уравнения, перенести ее действие на моментные величины, найти инварианты этой группы в терминах моментных величины, и «урезание» и замыкание моментной системы, приводящее к уравнениям сплошной среды, осуществлять с помощью этих инвариантных соотношений.

Реализуемость этой схемы установлена на простейшей ситуации одномерного кинетического уравнения, фактически совпадающего с уравнением Лиувилля

$$f_t + cf_x + (Ff)_c = 0 \tag{1}$$

(t – время, x – пространственная координата, c – скорость,

$$F = F(t, x, c)$$

– внешнее силовое поле, неизвестная функция $f(t, x, c)$ – фазовая плотность распределения частиц).

Оказалось, что задачу группового анализа уравнения (1) необходимо сопроводить дополнительными условиями, налагаемыми на группу преобразований. Это условия

- инвариантности при этих преобразованиях соотношений

  $$dx = c\,dt, \qquad dc = F\,dt, \tag{2}$$

  что выражает сохранение отношения между физическими величинами (t, x, c, F);
- инвариантности семейства прямых

  $$dx = dt = 0, \tag{3}$$

  необходимое, чтобы сохранялся физический смысл моментных величин;
- инвариантности при заменах переменных величины

  $$(1 + c\theta_x + F\theta_c)f(t, x, c)dxdc, \tag{4}$$

  на любой поверхности $t = \theta(x, c)$, что выражает независимость количества частиц в некотором фазовом объеме от выбора системы координат.

Установлено, что группа точечных преобразований пространства переменных (t, x, c, f), оставляющих инвариантными соотношения (2), (3) и величину (4), совпадает с группой диффеоморфизмов пространства переменных (t, x) и порожденных ими преобразований остальных переменных; группа эквивалентности уравнения (1) совпадает с этой группой.

Осуществлена групповая классификация уравнений (1) в указанном классе преобразований, максимальная группа симметрий оказалась восьмимерной (для $F = 0$ и эквивалентных ей) и совпадающей с проективной группой в $\mathbb{R}^2$.

Для полученных групп симметрий оказалось возможным явно описать действие этих групп на моментные величины, и найти инварианты. В случае $F = 0$ найденный дифференциальный инвариант привел к системе

$\rho_t + (\rho u)_x = 0$, $u_t + uu_x = 0$, которая хорошо известна как уравнения «гидродинамики без давления».

Точные формулировки полученных результатов будут представлены в докладе, их можно найти в работах [1-2].

Список литературы

[1] *Платонова К. С., Боровских А. В.* Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Условия сохранения физического смысла моментных величин // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 452-483.

[2] *Боровских А. В., Платонова К. С.* Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. IV. Полная групповая классификация в общем случае, 2019 , ТМФ, Т. 201, № 2, С. 232–265.

[1]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: bor.bor@mail.ru

[2]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: kseniya-plat@yandex.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА УРЫСОНА

БУРЕНКОВ М.И.[1], КАЛИДОЛДАЙ А.Х.[2], НУРСУЛТАНОВ Е.Д.[3]

Пусть (V,ν), (U,μ) измеримые пространства и $Z(U)$, $M(V)$ нормированные пространства ν-измеримых и μ-измеримых функций, соответственно. Пусть $K : \mathbb{R} \times U \times V \to \mathbb{R}$, и оператор $T : Z(U) \to M(V)$ определен следующим равенством: для любых $f \in Z(U)$

$$T(f,y) = \int_U K(f(x),x,y)d\mu \ , \quad y \in V \tag{1}$$

и предположим, что этот интеграл существует и конечен для почти всех $y \in V$. Данный оператор называется интегральным оператором Урысона.

Хорошо известно, что одним из достоинств метода вещественной интерполяции, основанного на свойствах введенного Петре К-функционала, является возможность перенесения основных результатов этого метода, установленных в линейном случае, на некоторые классы нелинейных операторов, например, на класс липшицевых или гельдеровых операторов , т.е. накладывалось условие вида:

$$\|Tf - Tg\|_Y \le C\|f-g\|_X^\alpha .$$

Заметим, что оператор Урысона, вообще говоря, не является квазилинейным оператором или гельдеровым оператором, поэтому соответствующие интерполяционные теоремы не применимы к этому оператору.

В данной работе получены интерполяционные теоремы Марцинкевича, Кальдерона и Стейна-Вейса для широкого класса нелинейных операторов. Данные теоремы применимы для ρ-однородных операторов, при $0 < \rho < \infty$. Построен интерполяционный метод, охватывающий операторы типа Урысона. В частности, получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\rho > 0,\ 1 < p_0 < p_1 < \infty,\ 1 \leq q_0, q_1 < \infty,\ q_0 \neq q_1,$ $0 < \sigma \leq \tau \leq \infty,\ 0 < \theta < 1$ *и*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Пусть T оператор Урысона.

Если для некоторых $M_1, M_2 > 0$ следующие неравенства имеют место

$$\|T(f) - T(0)\|^{\rho}_{L_{q_i,\infty}(V,\nu)} \leq M_i \|f\|_{L_{p_i,\sigma}(U,\mu)},\ \ i = 0, 1,$$

тогда

$$\|T(f) - T(0)\|^{\rho}_{L_{q,\tau}(V,\nu)} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L_{p,\tau}(U,\mu)},$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, \sigma, \tau, \theta$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty,\ 0 < q_0, q_1 < \infty,\ q_0 \neq q_1\ 0 < \theta < 1$ *и*

$$p = (1-\theta)p_0 + \theta p_1, \quad q = (1-\theta)q_0 + \theta q_1.$$

Если T оператор Урысона и для некоторых $M_1, M_2 > 0$ имеют место неравенства

$$\int_V (v_i(y)|T(f,y) - T(0,y)|)^{q_i} d\nu$$
$$\leq M_i \int_U (w_i(x)|f(x)|)^{p_i} d\mu, \quad f \in L_{p_i}(U, w_i, \mu), \quad i = 0, 1,$$

то

$$\|T(f) - T(0)\|^{q}_{L_q(V, v_0^{1-\theta} v_1^{\theta}, \nu)} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|^{p}_{L_p(U, w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}, \mu)},$$

где $c > 0$ зависит только от p_0, p_1 и θ.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP08856479.

[1]Математический институт им. С.М. Никольского, Российский университет дружбы народов, Россия. Email: burenkov@cardiff.ac.u

[2]Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева. Email: aitolkynnur@gmail.com

[3]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Казахстанский филиал); Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан. Email: er-nurs@yandex.ru

О РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ В МЕТОДЕ ФУРЬЕ

БУРЛУЦКАЯ М.Ш.[1], БЕЛОВА Д.В.[2], ГРИГОРЬЕВА Е.И.[3]

Традиционно в исследовании задач методом Фурье изучается соответствующая спектральная задача и обсуждаются вопросы сходимости формального решения и возможности его почленного дифференцирования. Трудности, связанные с получением уточненных асимптотических формул для решений спектральной задачи, с возможной кратностью спектра, успешно преодолеваются за счет использования резольвентного подхода [1]. При этом метод Фурье применяется с использованием идей по ускорению сходимости рядов, идущих от А.Н. Крылова, и позволяющих получать классическое решение при минимальных требованиях на начальные функции. В этом направлении достигнуто много успехов при получении как классических, так обобщенных решений (понимаемых как предел классических). Дальнейшее развитие этих идей продолжено в работах А.П. Хромова и связано с привлечением расходящихся рядов [2]. Его подход позволил получить необходимые и достаточные условия существования классических и обобщенных решений в случаях суммируемых потенциалов и начальных функций и, тем самым, расширить границы применения метода Фурье.

В работе рассматривается смешанная задача для волнового уравнения на геометрическом графе, состоящем из двух ребер, одно из которых образует цикл:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - Q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \quad u_2(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]. \tag{4}$$

Здесь $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $Q(x) = \mathrm{diag}(q_1(x), q_2(x))$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $q_j(x), \varphi_j(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначны. Условия (2) обеспечивают непрерывность решения во внутреннем узле графа и неподвижное закрепление свободного конца на втором ребре. Используя приемы из [2], решение представляется в виде быстросходящегося ряда:

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t),$$

где $A_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\Phi}(x+t) + \widetilde{\Phi}(x-t)]$, $\widetilde{\Phi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, при $x \in [0,1]$, а с отрезка $[0,1]$ продолжается на всю ось с помощью соотношений:
$\widetilde{\Phi}_1(-x) = \frac{1}{3}[2\widetilde{\Phi}_1(1-x) + 2\widetilde{\Phi}_2(x) - \widetilde{\Phi}_1(x)]$,
$\widetilde{\Phi}_2(-x) = \frac{1}{3}[2\widetilde{\Phi}_1(x) + 2\widetilde{\Phi}_1(1-x) - \widetilde{\Phi}_2(x)]$,
$\widetilde{\Phi}_1(1+x) = \frac{1}{3}[2\widetilde{\Phi}_1(x) + 2\widetilde{\Phi}_2(x) - \widetilde{\Phi}_1(1-x)]$, $\widetilde{\Phi}_2(1+x) = -\widetilde{\Phi}_2(1-x)$,
$A_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{F}_{n-1}(\eta,\tau)\, d\eta, \;\; n \geq 1,$
$F_n(x,t) = -\mathrm{diag}\,(q_1(x), q_2(x))\, A_n(x,t)$ при $x \in [0,1]$, а через $\widetilde{F}$ обозначено продолжение функции $F = (F_1, F_2)^T$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось с помощью аналогичных соотношений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-11-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Список литературы

[1] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // ЖВМиМФ. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

[2] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 19:3 (2019), 280–288

[1]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: burlutskaya@math.vsu.ru

[2]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: ianabelova123@yandex.ru

[3]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: elenabiryukova2010@yandex.ru

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВАСИЛЬЕВ В.Б.

Пусть C_+^a – угол на плоскости

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}.$$

Рассматривается модельное уравнение вида

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a, \tag{1}$$

в предположении, что символ $A(\xi) \sim (1 + |\xi|)^\alpha$ допускает волновую факторизацию относительно $-C_+^a$ [1]. Это означает, что имеется специальное представление символа

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с множителями, обладающими специальными свойствами, связанными с аналитическим продолжением в радиальные трубчатые области комплексного пространства $\mathbb{C}^2$.

Сопряженным конусом $\overset{*}{C}{}_+^a$ к C_+^a называется конус

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), ax_2 > |x_1|\},$$

радиальная трубчатая область $T(\overset{*}{C}{}_+^a)$ над конусом $\overset{*}{C}{}_+^a$ – это множество вида $\mathbb{R}^2 + i\,\overset{*}{C}{}_+^a$.

Волновая факторизация предполагает аналитическую продолжимость $A_{\neq}(\xi)$ в $T(-\overset{*}{C}{}_+^a)$, и $A_{=}(\xi)$ – в $T(\overset{*}{C}{}_+^a)$ с оценками

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \le c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm æ},$$

$$|A_{=}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \le c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - æ)}, \quad \forall \tau \in \overset{*}{C}{}_+^a,$$

число æ называется индексом волновой факторизации.

При наличии волновой факторизации и условии $|æ - s| < 1/2$ решение уравнения (1) существует и единственно, и может быть описано интегральной формулой [1]. Нас интересует случай, что произойдет с решением при $a \to \infty$.

Теорема 1. *Предположим, что волновая факторизация с индексом* $æ, |æ - s| < 1/2$, *существует для всех достаточно больших* a *и* $g \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда предел решения уравнения* (1)

$$\lim_{a\to\infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2)$$

существует и принимает следующий вид

$$\lim_{a\to\infty} \tilde{u}\xi_1,\xi_2) = A^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi) - \frac{1}{2}A^{-1}(\xi_1,0)\tilde{g}(\xi_1,0).$$

В случае, когда условие $|æ - s| < 1/2$ не выполняется, возможна неединственность решения. Некоторые ситуации с дополнительными граничными условиями рассмотрены в [2,3].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект FZWG-2020-0029 .

Список литературы

[1] . *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2010.

[2] *Kutaiba Sh., Vasilyev V.* On solutions of certain limit boundary value problems. AIP Conf. Proc. 2020. V. 2293, 110006.

[3] *Vasilyev V. B.* On certain 3D limit boundary value problem // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, № 5. P. 913–921.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия. Email: vbv57@inbox.ru

О НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

ВЕЛЬМИСОВ П.А.[1], ТАМАРОВА Ю.А.[2]

Рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными, описывающие математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления». Предложенные модели предназначены для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в двигателе и в трубопроводе. На основе этих моделей закон изменения давления рабочей среды в камере сгорания двигателя рассчитывается по изменению величины деформации упругого элемента датчика. Разработаны аналитические и численные методы решения указанных начально-краевых задач, в основу которых положены, в частности, метод Галеркина и метод конечных разностей.

Приведем в качестве примера математическую постановку, соответствующую двумерной модели механической системы «трубопровод — датчик давления» (рабочая среда - идеальная и сжимаемая)

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0,l), \quad y \in (0,h), \tag{1}$$

$$\varphi_y(x,0,t) = \varphi_y(x,h,t) = 0, \quad x \in (0,l), \tag{2}$$

$$\varphi_x(l,y,t) = \dot{w}(y,t), \quad y \in (0,h), \tag{3}$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0,y,t) = P(y,t), \quad y \in (0,h), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta \dot{w}'''' + f(\dot{w}, w) = \\ &= P_0 - \rho_0 \varphi_t(l,y,t) - P_*, \quad y \in (0,h). \end{aligned} \tag{5}$$

В (1)-(5) индексы x, y, t снизу обозначают частные производные; точка и штрих сверху – частные производные по t и по y соответственно; $P(y,t)$ — заданный закон изменения давления рабочей среды в камере сгорания (на входе в трубопровод $x = 0$); a_0, ρ_0, P_0, P_*, m, D, N, β — некоторые постоянные, являющиеся характеристиками механической системы; $f(\dot{w}, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(y,t)$ и скорости деформации $\dot{w}(y,t)$.

Имеем связанную задачу (которая должна быть дополнена начальными условиями) для потенциала скорости рабочей среды в трубопроводе $\varphi(x,y,t)$ и деформации $w(y,t)$ упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода $x = l$. Необходимо также задать граничные условия для $w(y,t)$ при $y = 0$, $y = h$, соответствующие типу закрепления концов элемента (например, $w = w_y = 0$ для жесткого защемления, $w = w_{yy} = 0$ для шарнирного закрепления).

Один из способов решения указанной задачи (1)-(5) основан на введении усредненных характеристик основных величин динамической системы и сведении решения задачи к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего усредненную величину деформации упругого элемента датчика $\theta(t)$ с законом изменения усредненного давления рабочей среды в двигателе $G(t)$

$$\begin{aligned} &m_0\left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] + \alpha_0\left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] + \\ &+\gamma_0\left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] - \\ &-\rho_0 a_0 w_0\left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] = 2[G(t) + (P_0 - P_*)h], \end{aligned}$$

где m_0, α_0, γ_0, w_0 - некоторые постоянные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, грант 18-41-730015.

[1]Ульяновский государственный технический университет, Россия.
Email: velmisov@ulstu.ru
[2]Ульяновский государственный технический университет, Россия.
Email: kazakovaua@mail.ru

БЭРОВСКИЙ КЛАСС ЛОКАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВЕТОХИН А.Н.

Рассматривается параметрическое семейство динамических систем, определенных на локально компактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого метрического пространства. Для любого такого семейства локальная топологическая энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

Следуя [1], приведем необходимое в дальнейшем определение локальной топологической энтропии. Пусть (X,d) — локально компактное метрическое пространство, а $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x,y\in X, \quad n\in\mathbb{N},$$

где f^i, $i\in\mathbb{N}$, – i-я итерация отображения f, $f^0\equiv \mathrm{id}_X$. Для всяких $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$, $r>0$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $N_d(x,f,r,\varepsilon,n)$ максимальное число точек в шаре $B_d(x,\varepsilon)\subset X$, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем r. Тогда *локальную топологическую энтропию* отображения f в точке x определяют формулой

$$h_{d,x}(f) = \lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln N_d(x,f,r,\varepsilon,n).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$, точке $x\in X$ и непрерывному отображению

$$f : \mathcal{M}\times X\to X \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu\mapsto h_{d,x}(f(\mu,\cdot)). \tag{2}$$

Теорема 1. *Для любых $x\in X$ и отображения (1) функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Отметим, что из этого результата в силу теоремы Бэра [2, гл. IX, §39, VI] вытекает, что для любых $x\in X$ и отображения (1) в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ найдется всюду плотное множество G типа G_δ такое, что сужение функции $\mu\mapsto h_{d,x}(f(\mu,\cdot))$ на множество G непрерывно. Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (2).

Теорема 2. *Существуют $\mathcal{M}$, X, и отображение (1) такие, что для любой точки $x\in X$ функция (2) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Список литературы

[1] *Каток С. Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦМНО, 2005.

[2] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., 1937.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Россия. Email: anveto27@yandex.ru

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

ВЛАДИМИРОВ А.А.

Рассмотрим самосопряженную гамильтонову систему

$$Jy' = [\lambda A + B]y, \qquad M^*Jy(0) = N^*Jy(1),$$

где $A \in (L_1[0,1])^{n\times n}$ — суммируемая матричнозначная функция с почти всюду неотрицательными значениями, $B \in (L_1[0,1])^{n\times n}$ — суммируемая матричнозначная функция с почти всюду самосопряженными значениями, матрица $J = -J^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ невырождена, а расширенная матрица $(M^*\ N^*)$ имеет максимальный ранг и подчиняется условию $M^*JM = N^*JN$. Операторную модель этой системы образует линейный пучок $T^\natural\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{D}^+, \mathfrak{D}^-)$ операторов, отображающих пространство

$$\mathfrak{D}^+ \rightleftharpoons \{y \in (W_1^1[0,1])^n\ :\ M^*Jy(0) = N^*Jy(1)\}$$

в пространство $\mathfrak{D}^- \rightleftharpoons (L_1[0,1])^n$.

Вводя в рассмотрение гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, получаемое пополнением пространства $\mathfrak{D}^+$ относительно нормы вида

$$\|y\|^2_{\mathfrak{H}} = \int_0^1 \sum_{i,j} A_{ij}\overline{y_i}y_j\,dx,$$

вместе с естественным вполне непрерывным вложением $I^+\colon \mathfrak{D}^+ \to \mathfrak{H}$, а также вложением $I^-\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{D}^-$ со свойством $I^-I^+y \equiv Ay$, мы получаем возможность поставить в соответствие исходной задаче определенное в пространстве $\mathfrak{H}$ линейное отношение

$$T^\bullet \rightleftharpoons [I^-]^{-1} \cdot T^\natural(0)\,[I^+]^{-1}$$

с резольвентой $(T^\bullet - \lambda)^{-1} = I^+ \cdot [T^\natural(\lambda)]^{-1}\,I^-$. В случае, когда для некоторого оператора $D \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ соответствующий оператор

$$T^\natural(D) \rightleftharpoons T^\natural(0) - I^-DI^+$$

обладает ограниченным обратным, спектры отношения $T^\bullet$ и пучка $T^\natural$ заведомо совпадают. Существование такого оператора $D \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ нами далее всегда предполагается.

Основным результатом настоящего доклада является следующий факт.

Утверждение 1. *Пусть дополнительно зафиксированы некоторые самосопряженные граничные условия $M_0^* Jy(0) = N_0^* Jy(1)$, для которых соответствующий линейный пучок $T_0^\natural \colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{D}_0^+, \mathfrak{D}^-)$ имеет конечное число отрицательных собственных значений. Пусть также для всякого вектора $v \in \mathbb{C}^n$ найдется последовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ элементов подпространства $\mathfrak{M}_0 \rightleftharpoons [T_0^\natural(\mu)]^{-1}\overline{\operatorname{im} A}$, где $\mu \ll 0$, со свойствами $\lim_{n\to\infty} y_n(0) = M_0 v$, $\lim_{n\to\infty} y_n(1) = N_0 v$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_0^\natural(\mu) y_n, y_n\rangle = 0$$

. Тогда сосчитанное с учетом кратности число расположенных слева от произвольно фиксированной точки $\varkappa \in \rho(T^\natural) \cap \rho(T_0^\natural) \cap \mathbb{R}$ собственных значений отношения $T^\bullet$ превосходит таковое для отношения $T_0^\bullet$ в точности на отрицательный индекс инерции матрицы

$$C_\varkappa \rightleftharpoons [N^* J N_0 - M^* J M_0]\,[S_\varkappa(1) N_0 - S_\varkappa(0) M_0]^{-1}\,[S_\varkappa(1) N - S_\varkappa(0) M],$$

где через $S_\varkappa \in (W_1^1[0,1])^{n\times n}$ обозначено произвольное невырожденное решение уравнения $S'_\varkappa = -S_\varkappa J^{-1}[\varkappa A + B]$.

Частными случаями этого факта являются полученные на совершенно другом пути недавние результаты [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-01-00240.

Список литературы

[1] *Владимиров А. А.* // Матем. заметки, 2020, Т. 107 (4), С. 633–636.

[2] *Курочкин С. В.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, Т. 58 (12), С. 2014–2025.

ФИЦ ИУ РАН, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Россия.
Email: vladimirov@shkal.math.msu.su

О СВОЙСТВАХ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

ВЛАСОВ В.В.

Представлены результаты, базирующиеся на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, примененном к исследовнию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказывается существование сжимающей и экспоненциально устойчивой C_0-полугруппы при определенных предположениях о ядрах интегральных операторов. Для широкого класса ядер интегральных операторов устанавливаются результаты о существовании и единственности классических решений указанных уравнений, с оценками скорости их экспоненцильного убывания. Приводятся примеры применения полученных результатов для интегро-дифференциальных уравнений с экспоненциальными и дробно-экспоненциальными ядрами (функции Работнова) интегральных операторов (см. [1]–[3]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-01-00288.

Список литературы

[1] *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 10. — С. 1426–1430.

[2] *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ и разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 496. — С. 16–20.

[3] *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия.
Email: victor.vlasov@math.msu.ru

О КРАТНОСТЯХ И АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

ВОЙТИЦКИЙ В. И.

Работа посвящена исследованию распределения кратностей и точной асимптотике собственных значений задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в прямоугольной области $\Omega = (0; a) \times (0; b)$. Хорошо известно, что эта задача имеет дискретный положительный (неотрицательный) спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечных кратностей с предельной точкой на бесконечности. В случае прямоугольной области все собственные значения вычисляются по формуле

$$\lambda_{km} = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2,$$

где $k, m \in \mathbb{N}$ или $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ соответственно для задачи Дирихле или Неймана. С использованием классических и новых результатов теории чисел и теории диофантовых приближений установлена зависимость спектральных свойств от того, является ли число $f^2 := (a/b)^2$ рациональным или нет.

Теорема 1. *Если $f^2 \notin \mathbb{Q}$, то все собственные значения однократные, при этом для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много различных пар (k_1, m_1) и (k_2, m_2), $k_1 \neq k_2$, $m_1 \neq m_2$ таких, что*

$$|\lambda_{k_1 m_1} - \lambda_{k_2 m_2}| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Если $f^2 \in \mathbb{Q}$, то существует бесконечно много кратных собственных значений. В случае $f \in \mathbb{Q}$ кратности не являются равномерно ограниченными, причем для любого $d \in \mathbb{N}$ существуют собственные подпространства, размерности d.*

Замечание 1. По-видимому, кратности не являются равномерно ограниченными для любого $f^2 \in \mathbb{Q}$ (в ряде конкретных примеров это выполнено). В одномерных спектральных задачах наблюдается иная картина. Например, в задаче Штурма-Лиувилля (даже для негладких потенциалов) собственные значения являются асимптотически простыми (см., например [1]).

Теорема 2 вначале доказывается для $f = 1$ (случай квадратной области), где можно получить явную формулу для количества $\nu(n)$ разложений целого числа $n = (a^2/\pi^2)\lambda$ в виде суммы двух квадратов положительных (неотрицательных) целых чисел. А именно, если

$$n = 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_l^{\beta_l} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_t^{\gamma_t},$$

где p_i — простые числа вида $4k+1$, q_i — простые числа вида $4k+3$, $\alpha, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $B := (\beta_1+1)(\beta_2+1)\ldots(\beta_l+1)$, то

$$\nu(n) = \begin{cases} 0, \text{ если хотя бы одно } \gamma_i \text{ нечетное;} \\ B, \text{ если все } \gamma_i \text{ и } B(\alpha+1) \text{ — четные;} \\ B \mp 1, \text{ если все } \gamma_i \text{ четные, а } B(\alpha+1) \text{ — нечетное} \end{cases}$$

("минус" в последней строчке соответствует задаче Дирихле, "плюс" — задаче Неймана).

На основе уточненной асимптотики числа целых точек внутри эллипса (см. [2], [3]) установлена формула для числа собственных значений в полуинтервале $[0;\lambda)$

$$N(\lambda) = \frac{ab}{4\pi}\lambda \mp \frac{a+b}{2\pi}\lambda^{1/2} + O(\lambda^{\frac{131}{416}+\varepsilon}), \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

Эта формула уточняет известную формулу Вейля (см., например, [4]). Более точная оценка остаточного члена пока не доказана. Известно, что она равна $O(\lambda^t)$, где $1/4 < t < 131/416 + \varepsilon$.

Список литературы

[1] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Матем. заметки. – 2006, Т. 80, вып. 6. – С. 864–884.

[2] *Huxley, M. N.* Exponential Sums and Lattice Points III. // Proc. London Math. Soc. – 2003, Vol. 87 (3). –P. 591–609.

[3] *Nowak, W. G.* Primitive lattice points inside an ellips // Czechoslovak Mathematical Journal. – 2005, 55 (130). – P. 519-530.

[4] *Сафаров, Ю. Г.* Асимптотические оценки разности считающих функций задач Дирихле и Неймана // Функц. анализ и его прил. – 2010, Т. 44, вып. 4. – С. 54–64.

Физико-технический институт Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, Россия. Email: victor.voytitsky@gmail.com

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СБОРА РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

ВОЛДЕАБ М.С.[1], РОДИНА Л.И.[2]

Задачам оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами, посвящено множество работ ученых, начиная с прошлого века. В настоящее время ведутся активные исследования по изучению оптимального промысла и его влияния на динамику и состав структурированных популяций, рассматриваются задачи периодического импульсного сбора ресурса, задачи оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследуется максимальная эффективность сбора и выгода от эксплуатации. Много публикаций посвящено вопросам эксплуатации популяций, определенных вероятностными моделями (обзор литературы приведен в [1]).

Рассмотрим модель популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \in [0,1]^n$, $k = 1, 2, \ldots$, что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geqslant 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Здесь в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; так, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного в момент kd.

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, заданную управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= \big(1 - u_i(k)\big) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что решение $\varphi(t, x)$ системы $\dot{x} = f(x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях, то есть функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ удовлетворяют *условию квазиположительности* (см. [2, с. 34]).

Пусть $X_i(k) = x_i(kd-0)$ — количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$, зависящее от долей ресурса $u(1), \ldots, u(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида. *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\big(\bar{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,. \tag{2}$$

В [3] получены оценки функции (2) для однородных и структурированных популяций. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором сохраняется часть популяции, необходимая для ее восстановления и достигается максимальная средняя временная выгода. Результаты исследования проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов, таких как конкуренция и симбиоз.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-01-00293.

Список литературы

[1] *Jensen F., Frost H., Abildtrup J.* Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. V.21. P. 167–178.

[2] *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород. Изд-во Нижегородского ун-та, 2007.

[3] *Волдеаб М. С., Родина Л. И.* О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия вузов. Математика. 2021. № 12.

[1]Владимирский государственный университет, Россия.
Email: mebseb2018@gmail.com

[2]Московский институт стали и сплавов, Россия.
Email: LRodina67@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

ГАВРИЛОВА О.В.[1], НИКОЛАЕВА Н.Г.[2]

Динамику деформации двутавровой балки моделирует уравнение Хоффа. В работе [1] Г.А. Свиридюком и В.О. Казаком было показано, что в случае $\alpha\beta > 0$ фазовое пространство уравнения Хоффа является простым банаховым C^∞ – многообразием. В случае $\alpha\beta < 0$ фазовое пространство имеет сборку Уитни как показано в работах [2, 3]. В данном исследовании ограничимся одномерным случаем ($n = 1$).

Запишем уравнение Хоффа:

$$\lambda u_t + u_{xxt} = \alpha u + \beta u^3,\ t \in (0, T) \tag{1}$$

Для нашего случая задача Шоуолтера – Сидорова выглядит следующим образом:

$$\lambda\left(u(x,0) - u_0(x)\right) + \left(u_{xx}(x,0) - u_0(x)\right) = 0,\ x \in (0, l) \tag{2}$$

Положим $\mathfrak{U} = L_4(\Omega)$, $\mathfrak{h} = \dot{W}_2^1$. Обозначим $\mathfrak{F}, \mathfrak{U}^*$ пространства сопряженные к $\mathfrak{h}, \mathfrak{U}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. При $n = 1$ согласно теореме вложения Соболева все вложения $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{U} \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{U}^* \hookrightarrow \mathfrak{F}$ плотны и непрерывны.

Фазовое пространство $\mathfrak{B}$ для данного уравнения примет вид:

$$\mathfrak{B} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle \alpha u, \psi \rangle + \left\langle \beta u^3, \psi \right\rangle = 0\}, \psi \in \ker L, \|\psi\|_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{3}$$

Считая, что $\alpha\beta < 0$ представим вектор u в виде $u = s\psi + v$, где $v \in \mathfrak{U}_\perp = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \psi \rangle = 0\}$, заметим, что множество $\mathfrak{B}$ C^∞ – диффеоморно множеству $\mathfrak{B} = \{(s, v) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{U} : s^3\|\psi\|^4_{\mathfrak{U}} + 3s^2 \int\limits_0^l \psi^3 v \ dx +$
$+ s(3 \int\limits_0^l \psi^2 v^2 \ dx + \alpha\beta^{-1}) + \int\limits_0^l \psi v^3 \ dx = 0\}$.

Уравнение, определяющее множество $\mathfrak{B}$, является кубическим уравнением общего вида $as^3 + bs^2 + cs + d = 0$. Любое кубическое уравнение общего вида при помощи замены $s = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к канонической форме $y^3 + py + q = 0$ с коэффициентами $a = \|\psi\|^4_{\mathfrak{U}},\ b = 3\int\limits_0^l \psi^3 v \ dx, c = 3\int\limits_0^l \psi^2 v \ dx + \alpha\beta^{-1}, d = \int\limits_0^l \psi v^3 dx$,
$p = \frac{3ac-b^2}{9a^2}, q = \frac{1}{2}(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}), Q(s,v) = p^3 + q^2, R(s,v) = 3s^2\|\psi\|^4_{\mathfrak{U}} +$
$+ 6s\int\limits_0^l \psi^3 v \ dx + 3\int\limits_0^l \psi^2 v^2 \ dx + \alpha\beta^{-1}$. Для дальнейшего рассмотрения введем следующие множества $\mathfrak{U}^\perp_+ = v \in \mathfrak{U}^\perp : Q(s,v) > 0, \mathfrak{U}^\perp_- = v \in \mathfrak{U}^\perp : Q(s,v) < 0$.

Теорема 1. *Пусть* $n = 1, \alpha\beta < 0, \lambda = \lambda_1$. *Тогда*
(i) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}^\perp \cap \mathfrak{U}^\perp_-$ *существует три решения задачи* (1), (2)*;*
(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}^\perp \cap \mathfrak{U}^\perp_+$ *существует одно решение задачи* (1), (2)*.*

Список литературы

[1] *Свиридюк Г.А., Казак В.О.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, №2. – 292–297 с.

[2] *Свиридюк Г.А., Тринеева И.К.* Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа // Известия Вузов. Математика. – 2005. – №10. – 54–60 с.

[3] *Гаврилова О.В., Николаева Н.Г., Манакова Н.А.* О неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для одной математической модели деформации двутавровой балки // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию. – 67–71 с.

[1]Южно-Уральский государственный университет, Российская Федерация. Email: gavrilovaov@susu.ru

[2]Южно-Уральский государственный университет, Российская Федерация. Email: et1814nng42@susu.ru

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

ГАРГЯНЦ Л.В.[1], ГОРИЦКИЙ А.Ю.[2]

В полосе $\Pi_T = \{(t, x) \mid t \in (0, T),\ x \in \mathbb{R}\}$, где $0 < T \leq +\infty$, рассматривается задача Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0,\ (t, x) \in \Pi_T, \qquad u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Мы будем строить кусочно гладкие обобщенные энтропийные решения задачи (1).

Ранее были построены примеры неограниченных (но при этом локально ограниченных) обобщенных энтропийных решений задач Коши (1), имеющих следующую структуру. Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими непересекающимися кривыми Γ_n на счетное число областей. В областях между этими кривыми решение является классическим, а линия сильного разрыва Γ_n формируется как огибающая семейства характеристик.

Принципиальной особенностью этих решений является смена знака при переходе через каждую линию разрыва. Тем самым, нарушается принцип максимума, и, как следствие, теряется единственность энтропийного решения задачи Коши, если под решением понимать функцию не из пространства $L_\infty(\Pi_T)$ (как в классических работах С.Н.Кружкова) а в более широком классе локально ограниченных функций, $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Pi_T)$. Отметим, что знакопостоянных энтропийных решений у рассматриваемых задач не существует.

Такие решения были построены для степенной функции потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u$, $\alpha > 1$, и неограниченными при $x \to -\infty$ начальными условиями $u_0(x) = |x|^\beta$, $\beta(\alpha - 1) > 1$, или $u_0(x) = e^{-x}$.

Решение строилось при помощи некой рекуррентной процедуры, позже был предложен способ, основанный на наличии у исследуемых задач групп симметрий.

В работе [1] сформулирован единый подход к построению такого типа решений в случае нечетной функции потока $f(u)$, имеющей в нуле единственную точку перегиба, основанный на преобразовании Лежандра. Как известно, именно преобразованием Лежандра определяются огибающие семейств прямых на плоскости.

Оказывается, что в случае степенной функции потока и начальными данными, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на минус бесконечности, можно применить описанную в статье [1] процедуру построения решения. Принципиальное отличие заключается в том, лишь **часть** ударной волны Γ_0 (а не вся кривая Γ_0, как в ранее построенных решениях) образуется как огибающая семейства характеристик, идущих от начальных условий.

Теорема 1. *У задач Коши* (1) *с функцией потока* $f(u) = |u|^{\alpha-1}u$*,* $\alpha > 1$*, и положительными начальными условиями, совпадающими со степенной* $g(x) = |x|^{\beta}$*,* $\beta(\alpha - 1) > 1$*, или экспоненциальной* $h(x) = e^{-x}$ *функцией на минус бесконечности, существуют знакочередующиеся кусочно гладкие обобщенные энтропийные решения со счетным числом ударных волн.*

Работа Л.В. Гаргянц выполнена при поддержке Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых, грант МК-1204.2020, а также при поддержке Министерства науки и высшего образования России, проект 0705-2020-0047.

Список литературы

[1] *Гаргянц Л. В., Горицкий А. Ю., Панов Е. Ю.* Построение неограниченных разрывных решений скалярных законов сохранения при помощи преобразования Лежандра // Мат. сборник. 2021. Т. 212. № 4. С. 29–44.

[1]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Россия. Email: gargyants@bmstu.ru

[2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: goritsky@mech.math.msu.su

АНАЛИТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕСТВА ТИПА МАРКОВА-ФРИДРИХСА-КОЛМОГОРОВА

ГАРМАНОВА Т.А.

Будем рассматривать пространства Соболева $\mathring{W}_p^n[0;1]$ состоящие из всех функций, таких что $f^{(j)}(x) \in AC[0,1]$ и $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, $\forall j = 0, ..., n-1$, а $f^{(n)}(x) \in L_p[0,1]$. Норма в данном пространстве определяется равенством:

$$\|f\|_{\mathring{W}_p^n[0;1]} := \left(\int\limits_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Определим величины $A_{n,k}(a)$ как наименьшие возможные константы в неравенствах

$$\left| f^{(k)}(a) \right|^2 \leqslant A_{n,k}^2(a) \|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}^2, \quad f \in \mathring{W}_2^n[0;1].$$

Такие неравенства называются аналитическими неравенствами типа Маркова-Фридрихса-Колмогорова.

Целью данного исследования является установление явного вида функций $A_{n,k}(a)$, для всех $a \in [0,1]$ и натуральных n и $0 \leqslant k < n$. Также рассматривается задача о нахождении точных значений

$$\Lambda_{n,k} := \sup_{x \in [0;1]} A_{n,k}(x).$$

Пусть $\mathcal{J}_{n,k}$ оператор вложения из пространства $\mathring{W}_2^n[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0;1]$ $(n > k \geqslant 0)$, тогда $\|\mathcal{J}_{n,k}\| = \Lambda_{n,k}$. Таким образом, $\Lambda_{n,k}$ – константа вложения пространства Соболева $\mathring{W}_2^n[0;1]$ в пространство $\mathring{W}_\infty^k[0;1]$.

Смещенные полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[0;1]$ и определяются как

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}\left((x^2-x)^n\right)^{(n)}$$

Первообразная порядка $0 \leqslant m \leqslant n$ определяется как

$$P_n^{(-m)} := \frac{1}{n!}\left((x^2-x)^n\right)^{(n-m)}$$

Задача о нахождения констант вложения в протсранствах Соболева была рассмотрена в большом количестве работ. Из последних результатов в работе [1] были получены формулы для констант $A_{n,0}^2$, $A_{n,1}^2$ и $A_{n,2}^2$, а также установлена связь между константами вложения и первообразными полиномов Лежандра. В работе [2] получены локальные свойства функций $A_{n,k}^2(x)$ и предъявлены формулы для $A_{n,4}^2$ и $A_{n,6}^2$. В работах [3], [4] были найдены экстремальные функции, на которых достигается равенство в неравенствах Маркова-Фридрихса-Колмогорова, доказаны различные свойства функций $A_{n,k}(a)$, в частности

Лемма 1. *Для любых $a \in [0,1]$ имеет место равенство*

$$A_{n,k}^2(a) = A_{n-1,k-1}^2(a) - (2n-1)\left(P_{n-1}^{(k-n)}(a)\right)^2.$$

Теорема 1. *Для всех четных k точное значение константы вложения имеет вид*

$$\Lambda_{n,k}^2 = A_{n,k}^2(1/2) = \frac{((k-1)!!)^2}{2^{4n-3k-2}((n-(k/2)-1)!)^2(2n-2k-1)}.$$

Последовательно доказываются следующие факты.

Лемма 2.

$$P_n^{(k-n)}(t) = \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{k}{2},\, n-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\\ n-k+1\end{matrix};-4t\right],$$

где $t = a^2 - a$, ${}_2F_1(t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Теорема 2. *Для любых $0 \leqslant j \leqslant m$ имеет место равенство*

$$P_m^{(-j)}(x) = (x^2 - x)^j \frac{(m-j)!}{(m+j)!} P_m^{(j)}(x).$$

Теорема 3. *Функции $A_{n,k}$ удовлетворяют соотношению*

$$A_{n,k}^2(t) = \frac{-t^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)((n-k-1)!)^2} \cdot \\ \cdot {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k \end{matrix} ; -4t \right],$$

где $t = a^2 - a$, ${}_3F_2$ — гипергеометрическая функция типа (3,2).

Следствие 1. *1) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k - четно и $n > k$, тогда*

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} -k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k \end{matrix} ; 1 \right] = \frac{((k-1)!!)^2}{2^k (n-k)^2_{\frac{k}{2}}}$$

2) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, k - нечетно и $n > k$, тогда

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} -k,\, n-k-\frac{1}{2},\, 2n-k \\ n-k,\, 2n-2k \end{matrix} ; 1 \right] = \frac{(k!!)^2}{2^{k+1} (n-k)^2_{\frac{k+1}{2}}}$$

где $(m)_l := m(m+1)...(m+l-1)$ — символ Похгаммера.

Утверждение 1. *Для любого нечетного $k \geqslant 3$ значение $\Lambda_{n,k}^2$ удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{(k!!)^2}{2^{4n-3k-1}((n-\frac{k+1}{2})!)^2(2n-2k-1)} \leqslant \Lambda_{n,k}^2$$

$$\Lambda_{n,k}^2 \leqslant \frac{((k-2)!!)^2}{2^{4n-3k-3}((n-\frac{k+1}{2}-1)!)^2(2n-2k-1)}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 19-01-00240.

Список литературы

[1] *Калябин Г. А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\mathcal{H} := \overset{\circ}{W}{}_2^n\,[0;1]$. Труды МИАН, 2010, Т.269, 143–149.

[2] *Назаров А. И., Мукосеева Е. В.* О симметрии эктремали в некоторых теоремах вложения. Зап. научн. сем. ПОМИ, 2014, т.425, 35–45.

[3] *Гарманова Т. А., Шейпак И. А.* Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева Труды Московского математического общества, 2019, т.80, вып. 2, 221–246.

[4] *Гарманова Т. А., Шейпак И. А.* О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева Функциональный анализ и его приложения, 55:1 (2021), 43–55. М.: Наука, 1974.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия. Email: garmanovata@gmail.com

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

ГОЛУБЯТНИКОВ А.Н.[1], УКРАИНСКИЙ Д.В.[2]

Дано доказательство глобальной аналитичности решения уравнений одномерной газовой динамики для слоя газа, заключенного между двумя поршнями, на одном из которых ($m = 0$) условия задаются периодическим образом, а на втором ($m = M$) с необходимостью подбираются. В простейшей постановке система уравнений для закона движения газа $x(m, t)$ имеет вид

$$x_{tt} + p_m = 0, \quad px_m^\gamma = f(m).$$

Рассматривается рациональный показатель адиабаты $\gamma = k/l > 1$, где k и l — целые числа. За счет введения новых неизвестных функций $p = q^{-k}$ и $x_t = ku$ система уравнений может быть записана в квазилинейной форме

$$u_m = F(m)q^{l-1}q_t, \quad q_m = q^{k+1}u_t, \tag{1}$$

где $F(m) = (1/\gamma)f^{1/\gamma}$. Ключевым преимуществом данной формы уравнений является тот факт, что величина q входит в правые части системы аналитически при положительных k и l. Стоит заметить, что при отрицательных k и l данное свойство справедливо для уравнений, разрешенных относительно u_t и q_t

$$u_t = q^{-(k+1)}q_m, \quad q_t = F^{-1}(m)q^{-(l-1)}u_m,$$

что позволяет рассмотреть начальную задачу. Для изучения конкретной задачи к уравнениям (1) добавляются для простоты условия, моделирующие процесс периодических колебаний поршня при сохранении на нем термодинамических параметров в процессе движения

$$u(0, t) = u_0T\cos(t/T), \quad q(0, t) = q_0. \tag{2}$$

Пусть также справедливы разложения (здесь F_n не зависят от M)

$$F(m) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n m^n, \quad \Phi(m) = \sum_{n=0}^{\infty} |F_n| m^n.$$

Строится решение задачи (1)–(2) в виде степенного ряда. Для доказательства его сходимости используется теорема Ковалевской [1, §7] и, в частности, метод мажорант. Но в отличие от классических рассуждений, целью является доказательство сходимости не в некоторой окрестности нуля, а на множестве $U = \{m \in [0, M], t \in [0, 2\pi T]\}$. Данного результата можно добиться выбором постоянной N, ограничивающей сверху члены разложения в ряд правых частей квазилинейной системы (после замены искомых функций, приводящей начальные условия задачи к тождественно нулевым), в виде

$$N = \max\{1, [1 + u_0 \exp(R/T) + \Phi(R)]\, D\},$$

где величина $u_0 \exp(R/T)$ — предполагается постоянной при уменьшении T (что фактически говорит о необходимости в уменьшении амплитуды колебаний поршня при повышении их частоты), множитель $D = (R + q_0)^{k+1}$ при $R + q_0 \geq 1$ и $D = (R + q_0)^{l-1}$ при $R + q_0 < 1$, а R — число, немного меньшее радиуса сходимости ряда для $F(m)$. При данном N нужным уменьшением M и T (что с механической точки зрения является выбором независимых масштабов) удается поместить все множество U внутрь круга сходимости решения мажорантной задачи и тем самым гарантировать отсутствие образования ударных волн в процессе движения газа. Периодические по времени условия $u(0, t)$ и $q(0, t)$ приводят к периодическому по времени решению, что можно увидеть с помощью метода математической индукции по коэффициентам разложения в степенной ряд функций $u(m, t)$ и $q(m, t)$. Приведены неравенства для средних закона движения с монотонным весом $\chi(m)$.

Список литературы

[1] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

[1]Московский государственный университет, Россия.
Email: golubiat@mail.ru
[2]Московский государственный университет, Россия.
Email: d.v.ukrainskiy@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

ГРАНИЛЬЩИКОВА Я.А.

Рассмотрим дифференциальный оператор L_0, определенный на функциях из пространства Соболева $W_2^1([-1; 1])$:

$$L_0(y) = \alpha(x) y'(x) + y'(-x) \tag{1}$$

с краевым условием

$$U_0(y) = y(-1) - \beta y(1) = 0 \tag{2}$$

Здесь $\alpha(x)$ - вещественнозначная функция, такая что

$$\alpha(x) \in C([-1;1]),\ \alpha'(x) \in L_\infty([-1;1]),\ |\alpha(x)| \neq 1 \tag{3}$$

В определении L_0 присутствует оператор инволюции $Jy(x) = y(-x)$, и подразумевается, что $y'(-x) = J\frac{d}{dx}y(x)$.

Изучим краевую задачу для возмущенного оператора на том же пространстве

$$L(y) = \alpha(x)y'(x) + y'(-x) + g(x)y(x) + r(x)y(-x) = \lambda y(x) \tag{4}$$

и с тем же краевым условием. Предположим, что существуют функции $g(x)$ и $r(x)$ такие, что уравнение (3) имеет решение вида

$$y(x) = e^{\gamma(x)\lambda} + c(x)e^{\gamma(-x)\lambda} \tag{5}$$

где функции $\gamma(x),\ c(x)$ зависят только от $\alpha(x)$.

Определение 1. Краевое условие вида (2) назовем регулярным, если для него выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \beta \neq c(1)^{-1} \\ \beta \neq c(1) \end{cases}$$

Для такого условия найдем собственные значения и собственные функции возмущенной задачи (4),(2):

$$\lambda_k = \frac{1}{\Gamma}\Big(\ln A + 2\pi ik\Big), k \in \mathbb{Z}$$

$$y_k(x) = e^{\gamma(x)\frac{1}{\Gamma}\Big(\ln A + 2\pi ik\Big)} + c(x)e^{\gamma(-x)\frac{1}{\Gamma}\Big(\ln A + 2\pi ik\Big)}$$

где комплексные числа $A = A(\beta, \alpha(x))$, $\Gamma = \Gamma(\alpha(x))$.

Исследуя базисность по Риссу собственных функций для различных $\alpha(x)$, получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть для вещественнозначной функции $\alpha(x)$ выполнены условия (3), и либо $|\alpha(x)| > 1$, либо $|\alpha(x)| < 1$ и $\alpha(x) = \alpha(-x)$. Тогда существуют такие функции $g(x), r(x)$, что уравнение (4) имеет решение вида (5). При этом собственные функции задачи (4),(2) с параметрами $\alpha(x), g(x), r(x)$ и регулярным краевым условием составляют безусловный базис Рисса пространства $L_2([-1;1])$.*

Используя подчиненность оператора $L - L_0$ оператору L, получаем более общий вывод:

Теорема 2. *Пусть для вещественнозначной функции $\alpha(x)$ выполнены условия (3), и либо $|\alpha(x)| > 1$, либо $|\alpha(x)| < 1$ и $\alpha(x) = \alpha(-x)$. Тогда собственные функции задачи (4),(2) с произвольными существенно ограниченными коэффициентами $g(x)$, $r(x)$ и регулярным краевым условием составляют безусловный базис Рисса пространства $L_2([-1;1])$.*

Пример 1. Если $|\alpha(x)| < 1$ и $\alpha(x)$ нечетна, то безусловная базисность по Риссу не гарантируется. В случае $\alpha(x) = \kappa x$, $\kappa \in (-1;1)$ ее не будет.

Доклад основан на совместной работе с А.А.Шкаликовым

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ), грант No 19-01-00240.

Список литературы

[1] *Владыкина В.Е., Шкаликов А.А.* Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией. Математические заметки, 2019, т. 6, вып. 5, стр. 643-659

[2] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия. Email: yasya.granilshchikova@yandex.ru

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

ГРЕБЕНЕВА А. А.[1], ХАЗОВА Ю.А.[2]

Уравнению спинового режима горения тонкостенного кругового цилиндра радиуса r соответствует краевая задача:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \xi = \varepsilon \left[\dot{\xi} \left(1 - \frac{3}{4} \dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\beta \lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} \right], \\ \xi(t, x + 2\pi r) = \xi(t, x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\xi(t,x)$ — координаты точек фронта горения, $0 < \varepsilon << 1$ — инкремент неустойчивости малых колебаний фронта, $\lambda > 0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков искривленного фронта, точка означает дифференцирование по времени, Δ — одномерный оператор Лапласа.

Для построения решения задачи (1) применяется метод Галеркина — решение представляется в виде

$$\xi = y_0(t) + y_1(t) \cos(\theta) + V(t, \theta),\ \theta = \frac{x}{r}.$$

Найдено периодическое решение типа бегущей волны уравнения (1), проведен анализ его устойчивости.

Список литературы

[1] *Хазова Ю. А.* Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности // Компьютерные исследования и моделирование. 2017, Т. 9, № 5, С. 705–716.

[2] *Хазова Ю. А.* Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017, Т. 25, № 6, С. 57–69.

[3] *Хазова Ю. А., Шиян О. В.* Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения // Динамические системы. 2018, Т. 8, № 3, С. 275–280.

[1]Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Россия.
Email: agrebeneva2001@gmail.com

[2]Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Россия.
Email: hazova.yuliya@hotmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ГРИГОРЬЕВА А.И.

Рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$D_t\left[(-1)^p D_t^{2p+1}u - h(x)u_{xx}\right] + a(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \qquad (1)$$

($p \geq 1$—целое, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$).

Пусть x есть точка отрезка $[-1,1]$ оси Ox, t есть точка отрезка $[0,T]$, $0 < T < \infty$, Q_1, Q_2 и Q есть цилиндры $(-1,0)\times(0,T)$, $(0,1)\times(0,T)$ и $(-1,1)\times(0,T)$, соответственно, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — функции, определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$, $h(x)$, $a(x)$ —заданные функции, определенные при $x \in [-1,1]$, $t \in (0,T)$ и имеющие разрыв 1-го рода при $x = 0$, α, β — заданные действительные числа.

Краевая задача: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \ t \in (0,T), \qquad (2)$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \ k = 0,...,p, \ x \in (-1,0)\cup(0,1), \qquad (3)$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \ k = 0,...,p, \ x \in (-1,0)\cup(0,1), \qquad (4)$$

а также условия сопряжения

$$u(-0,t) = \alpha u(+0,t),\ u_x(+0,t) = \beta u_x(-0,t),\ t \in (0,T). \qquad (5)$$

Целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений.

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (НИР № FSRG-2020-0006)

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Россия. Email: shadrina_ai@mail.ru

TRANSMISSION EIGENVALUES ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

ГРИНЕВИЧ П.Г.[1], НОВИКОВ Р.Г.[2]

В настоящее время в литературе активно обсуждается задача о transmission eigenvalues – уровнях энергии в задчах рассеянния, для которых можно найти такую комбинацию падающих волн, что рассеянная волна такая же, как если бы рассеватель отсутсвовал. Это свойство является ослабленной версией свойства свойства прозрачности при данной энергии. Известно, что для достаточно гладких потенциалов такие уровни образую дискретное подмножество и кратности вырождения конечы. Мы рассмотренли противоположный случаю – систему точечечных рассеивателей типа Бете-Пайерлса-Березина-Фаддеева. Нами показано, что для таких потенциалов все положительные уровни энергии являются transmission eigenvalues бесконечной кратности.

Работа выполнена при поддержке совместного проекта РФФИ/CNRS, грант РФФИ 20-51-1500/PRC no. 2795 CNRS).

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Институт теоретической физики им.Л.Д. Ландау РАН, МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия. Email: pgg@landau.ac.ru

[2]Высшая политехническая школа, Франция.
Email: novikov@cmap.polytechnique.fr

РАСШИРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ГУЩИН А.К.

Хорошо известно, что не любое классическое решение является обобщенным. Основным содержанием настоящего доклада является расширение множества граничных функций и изменение определения принятия граничного условия, которые включают классическое и обобщенное решения. Мы ограничимся рассмотрением задачи Дирихле для равномерно эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \quad x \in Q, \quad u|_{\partial Q} = u_0 \in L_p(\partial Q), p > 1, \tag{1}$$

где Q – ограниченная область n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}_n$, а $(a_{ij}(x))$ – матрица с измеримыми и ограниченными элементами. Под решением задачи понимается $(n-1)$-мерно непрерывная функция из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, удовлетворяющая (1). Пространство s-мерно непрерывных функций $C_{s,p}(\bar{Q})$ было введено в работах [1], [2]. Обозначим символом $\mathbf{M}_s$, $0 \le s \le n$, – множество борелевских неотрицательных мер μ, $\mu(\bar{Q}) = 1$, с носителями в $\bar{Q}$, удовлетворяющих оценке

$$\exists C > 0\ \forall r > 0\ \forall x^0 \in \bar{Q} \quad \mu(\{x : |x - x^0| < r\}) \le Cr^s; \tag{2}$$

$\|\mu\|_s = \inf C$. Функция $v : \bar{Q} \to \mathbf{R}$ принадлежит $C_{s,p}(\bar{Q})$, если "близким мерам из $\mathbf{M}_s$ соответствуют близкие значения"; функции из этого пространства естественно рассматривать как отображение

$\mu_s \ni \mu \to v \in L_p(\mu)$; подробнее см. [2]. На пространстве $C_{s,p}(\bar{Q})$ вводится норма $\|v\|^p_{C_s(\bar{Q})} = \sup\limits_{\mu\in\mathbf{M}_s} \frac{1}{\|\mu\|} \int\limits_{\bar{Q}} |v|^p d\mu(x)$. При естественном отождествлении функций введенное пространство является банаховым, множество непрерывных функций плотно в нем. Далее мы будем предполагать, что нормаль к границе рассматриваемой области удовлетворяет условию Дини. От коэффициентов уравнения будем требовать непрерывность по Дини на границе. Отказаться от последнего условия нельзя.

Теорема 1. [3]. *Для любой $u_0 \in L_p(\partial Q)$ решение $u(x)$ задачи (1) из пространства $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ существует, оно единственно и для него справедлива оценка*

$$\|u\|^p_{C_{n-1,p}(\bar{Q})} \leq \mathrm{const} \int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS.$$

Отметим, что утверждение теоремы остается справедливым, если расширить класс мер: в оценке (2) взять меру Карлесона. Это расширение немедленно дает свойство внутренней непрерывности решения. Как показывает следующее утверждение больше увеличить класс мер нельзя.

Теорема 2. [4]. *Оценка $\int\limits_{\bar{Q}} |u(x)|^p d\mu(x) \leq \mathrm{const} \int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS$ справедлива для всех $u_0 \in L_p(\partial D)$ тогда и только тогда, когда мера μ является мерой Карлесона.*

Для аналитической в круге функции с граничным значением u_0 эта теорема была доказана Карлесоном. Для гармонических функций этот результат был установлен Хермандером.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН.

Список литературы

[1] *Гущин А. К.* Матем. сб., 1988, 137(179), 1(9), 19-64.
[2] *Гущин А. К.* Матем. сб., 2020, 211, 11, 54-71.
[3] *Гущин А.К.* Матем. сб., 2018, 209, 6, 47-64.
[4] *Гущин А. К.*. ТМФ, 2013, 174, 2, 243-255.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия.
Email: akg@mi-ras.ru

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

ДЕМИДЕНКО Г.В.

Будем рассматривать класс систем нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t, y), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где элементы матриц $A(t)$ размера $n \times n$ являются непрерывными T-периодическими функциями, а непрерывная вектор-функция $f(t,y)$ локально удовлетворяет условию Липшица по y

$$\|f(t,y^1) - f(t,y^2)\| \le L\|y^1 - y^2\|$$

и следующим условиям

$$f(t+T,y) \equiv f(t,y), \quad \|f(t,y)\| \le q(1+\|y\|)^{\omega},$$

где $q > 0$, $\omega \ge 0$ — константы. Предполагается, что линейная система

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

экспоненциально дихотомична [1]. Согласно спектральному критерию это эквивалентно тому, что спектр матрицы монодромии $Y(T)$ не пересекается с единичной окружностью. В работе [2] установлен новый критерий экспоненциальной дихотомии, который формулируется в терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -\left(Y^{-1}(t)\right)^* P^*Q(t)PY^{-1}(t)$$

$$+(Y^{-1}(t))^*(I-P)^*Q(t)(I-P)Y^{-1}(t), \quad 0 < t < T,$$

где $Q(t) \in C[0,T]$ эрмитова матрица, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^T Q(s)ds > 0,$$

$Y(t)$ — матрицант линейной системы (2),

$$P^2 = P, \quad PY(T) = Y(T)P.$$

Наша цель — на основе этого критерия получить оценки параметров дихотомии, доказать теорему о возмущении для экспоненциальной дихотомии, изучить условия существования T-периодических решений системы (1), установить их устойчивость при малых возмущениях коэффициентов и нелинейных членов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

Список литературы

[1] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[2] *Demidenko G. V.* On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations. 2016. V. 6, No. 1. P. 63–74.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия.
Email: demidenk@math.nsc.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕИЗВЕСТНЫМ СОСТАВНЫМ ИСТОЧНИКОМ

ДЕНИСОВ А.М.

Рассмотрим начально-краевую задачу для функции $u(x, y, t)$

$$u_t = \Delta u + F(x, y)p_1(t) + G(x, y)p_2(t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u_y(x, l, t) = 0, \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \tag{4}$$

где $D = \{(x, y) : \quad x \in R, \quad y \in (0, l)\}$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ заданы , а функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$ неизвестны. Требуется определить $F(x, y)$ и $G(x, y)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4)

$$u_y(x, 0, t) = h(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{5}$$

где $h(x, t)$ - заданная функция.

В случае, когда $p_1(t) = e^{-\mu_1 t}$, а $p_2(t) = e^{-\mu_2 t}$ обратная задача имеет естественную физическую интерпретацию.

В докладе приводятся примеры неединственности решения обратной задачи, доказываются теоремы единственности ее решения в специальных классах функций $F(x, y)$ и $G(x, y)$, обсуждается зависимость единственности решения обратной задачи от заданных функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и устанавливается связь обобщения обратной задачи с теорией аналитичности решений эллиптических уравнений произвольного порядка.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: den@cs.msu.ru

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

ДЕНИСОВ В.Н.

В полупространстве $[t>0]=[x\in E^N, t>0]$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k,l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_{kl}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_l}\Big)=0, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x), x\in E^N.$$

Предположим, что матрица коэффициентов $a_{kl}(x,t)=a_{lk}(x,t)$ - симметрическая и выполняется условие равномерной параболичности (1.3) из работы [1] (см. [1] , стр. 13).

Хорошо известно, что $G(x,y,t)$ фундаментальная матрица решений уравнения (1), удовлетворяет оценкам

$$C_1 t^{-\frac{N}{2}}\exp\Big(-\frac{r^2}{C_2 t}\Big)\leqslant G(x,y,t)\leqslant C_3 t^{-\frac{N}{2}}\exp\Big(-\frac{r^2}{C_4 t}\Big)$$

с постоянными $C_i>0, i=1,...,4$, зависящими от N и постоянных из условия равномерной параболичности уравнения (1).

Мы изучим вопрос о существовании пределов при $t\to+\infty$ модифицированных средних Чезаро по t от $u(x,t)$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha+1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}\Big(1-\frac{\tau}{\alpha}\Big)^{\alpha}u(x,t\tau)d\tau$$

и средних Абеля по t от $u(x,t)$

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^{\infty}e^{-\tau}u(x,t\tau)d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть $u_0(x)\in C(E^N)$ и удовлетворяет условию*

$$|u_0(x)|\leqslant M(1+|x|^m), M>0, m>0,$$

и пусть $\alpha=\alpha(t)$ - монотонно возрастающая функция, такая, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^m}{\alpha(t)}=1.$$

Тогда для разности

$$I(x,t)=u(x,t)-S(u,x,t,\alpha(t))$$

имеет место оценка

$$\sup_K |I(x,t)| \leqslant \frac{M}{t^{m/2}} \to 0, \tag{2}$$

равномерно по x на каждом компакте K в E^N.

Из неравенства (2) следует теорема о равностабилизации

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) - S(u,x,t,\alpha(t)) = 0,$$

при $t \to +\infty$, равномерно по x на каждом компакте К в E^N.

Список литературы

[1] *Фридман А. Ф.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

[2] *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях вреиени. Успехи Матем. наук, т.60, № 4, с.145-212, 2005.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: vdenisov2008@yandex.ru

ПОЛЯ РИБА И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

ДЕНИСОВА Н.В.

Векторное поле v на трехмерном многообразии Q с формой объема Ω называется *полем Риба*, если найдется
1-форма ψ такая, что

1) $i_v\Omega = d\psi$,
2) $i_v\psi = \psi(v) > 0$.

В симплектической топологии известна следующая гипотеза Вейнстейна: векторное поле Риба на любом трехмерном замкнутом многообразии всегда имеет хотя бы одну периодическую траекторию (см. обсуждение в [1]). Правда, пока это доказано для случая трехмерный сферы [2]. Применим этот результат Хофера к задаче о периодических траекториях фиксированной энергии h в задачах динамики, когда M – двумерная сфера. Тогда при $h > \max V$ энергетическое многообразие Q – расслоенное пространство с базой S^2 и слоем окружность – будет диффеоморфно $SO(3)$ (трехмерная сфера с отождествленными антиподальными точками). Так как имеется неразветвленное двулистное накрытие $S^3 \to SO(3)$, то наше векторное поле v (определенное дифференциальными уравнениями) можно поднять на S^3. И если v есть векторное поле Риба на $SO(3)$, то таковым будет и "поднятое"векторное поле. Следовательно, если выполнено неравенство $\inf_\vartheta |\vartheta(v)| < \mu^2$, то $\psi(v) > 0$ – гироскопические силы не так велики. Тогда динамическая система будет иметь хотя бы одну периодическую траекторию при фиксированном значении полный энергии h.

Стоит подчеркнуть два момента. Так как S^2 односвязна, то любая замкнутая 2-форма Γ на S^2 ($d\Gamma = 0$) будет точной. С другой стороны, неравенство, эквивалентное условию положительной определенности квадратичной формы $4L_0L_2 - L_1^2$ (L_2 – кинетическая энергия, $L_0 = h - V$, а L_1 – 1-форма гироскопических сил), что, в частности, влечет ограниченность снизу функционала укороченного действия

$$\int (2\sqrt{L_0L_2} + L_1)dt.$$

Это обстоятельство позволяет доказать существование периодической траектории вариационными методами, что и было фактически сделано Биркгофом в [3] (относительно современного состояния вопроса см. [4]). В [5] симплектическая топология применяется для доказательства существования периодических траекторий в случае, когда M^2 – двумерный тор.

Работа выполнена за счет средств гранта РНФ (проект № 21-71-30011).

Список литературы

[1] Хофер Х., *Голоморфные кривые и динамика в трехмерном пространстве*, В кн.: Лекции по симплектической геометрии и топологии. М.: Изд-во МЦНМО, 2008, С. 39-104.

[2] Hofer H. *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. 1993. V. 114. P. 515-563.

[3] Birkhoff G.D., *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. Amer. Math. Soc. V. 18. 1917. P. 199–300.

[4] Тайманов И.А., *Замкнутые экстремали на двумерных многообразиях*, УМН. 1992. Т. 47. № 2. С. 143–185.

[5] Козлов В.В., *Вариационное исчисление в целом и классическая механика*, УМН. 1985. Т. 40. Вып. 2. С. 33-60.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Россия. Ярославский государственный университет имени П.Г.Демидова,
Россия. Email: ndenis@mech.math.msu.su

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

ДОБРОХОТОВ С.Ю.[1], МИНЕНКОВ Д.С.[2], НАЗАЙКИНСКИЙ В.Е.[3]

С помощью недавно построенных С.Ю.Доброхотовым, В.Е.Назайкинским и А.И.Шафаревичем [1] новых интегральных представлений для канонического оператора Маслова устанавливается соответствие [2] функций Бесселя J_ν с некомпактными лагранжевыми многообразиями, аналогичными торам Лиувилля в теории интегрируемых систем. Это дает, в частности, возможность получить различные “геометрические” асимптотики для функций Бесселя. В качестве приложения рассматриваются задачи о бесселевых волновых пучках [3].

Работа выполнена по теме государственного задания (N госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

Список литературы

[1] *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.*, Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах, Изв. РАН. Сер. матем., 81:2 (2017), 53–96

[2] *Доброхотов С. Ю., Миненков Д. С., Назайкинский В. Е.*, Представления функций Бесселя с помощью канонического оператора Маслова, ТМФ, 208:2 (2021), 196–217

[3] *Доброхотов С. Ю., Макракис Г., Назайкинский В. Е.*, Канонический оператор Маслова, одна формула Хермандера и локализация решения Берри–Балажа в теории волновых пучков, ТМФ, 180:2 (2014), 162–188

[1]Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Россия.
Email: s.dobrokhotov@gmail.com

[2]Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Россия.
Email: minenkov.ds@gmail.com

[3]Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Россия.
Email: nazaikinskii@googlemail.com

О НЕКОТОРЫХ НЕСТАНДАРТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ 3D–ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

ДУБИНСКИЙ Ю.А.

Предлагается методика формирования цикла нестандартных краевых задач теории поля и их исследования.

В основе разработки новых краевых задач теории векторных полей лежит функционально-геометрический подход описания ядер операторов граничного следа и ядер функционалов граничного следа в пространствах Соболева. Эти ядра различны и определяют тем самым различные базовые подпространства искомых решений. При этом ядра операторов следа приводят к краевым задачам с локальными(точечными) граничными условиями, а ядра функционалов следа к краевым задачам с нелокальными (интегральными) граничными условиями. Основными особенностями изучаемых краевых задач являются:

1) нелокальность краевых условий,

2) наличие в граничных условиях основных операторов теории поля первого порядка, т.е. градиента, дивергенции и ротора.

Примерами таких задач являются следующие задачи для системы уравнений Пуассона:

$$-\Delta u(x) = h(x), x \in G \subset \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

$$(u, n)_\Gamma = 0, [n[\frac{\partial u}{\partial n}, n]]_\Gamma = 0$$

$$-\Delta u(x) = h(x), x \in G \subset \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

$$\int_\Gamma (u, n) d\gamma = 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \alpha \cdot n(\gamma), \gamma \in \Gamma$$

Здесь $u(x)$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$ – искомые величины.

Нелокальность краевых условий обусловлена тем фактом, что операторы следа каждой фиксированной функции из пространства Соболева определяют линейные непрерывные функционалы над граничными пространствами дробного порядка. Ядра этих функционалов суть подпространства коразмерности единица, и которые задаются интегральными соотношениями, приводящими к нелокальности краевого условия.

При постановке задач существенно различать классические (регулярные) операторы следа, приводящие к регулярным функционалам над дробными граничными пространствами, и сингулярные операторы следа, являющегося сингулярной обобщенной функцией над пространством следов в смысле теории соболевских пространств.

Примером сингулярного оператора следа является оператор, сопоставляющей каждой функции u(x) из пространства Соболева первого порядка граничное значение линейной комбинации

$$\frac{\partial u}{\partial n} - [\mathrm{rot} u, n] - \mathrm{div} u \cdot n.$$

Указанная линейная комбинация имеет след, как функционал над пространством дробного порядка $1/2$, и для гладких функций является обычным граничным следом указанной комбинации. Именно ядра сингулярных операторов следа и ядра сингулярных функционалов следа приводят к краевым задачам, содержащим в краевых условиях операции теории поля первого порядка.

Необходимо отметить, что ядра функционалов следа имеют, как известно, одномерное коядро, в то время как ядра операторов следа приводят к разложениям пространств Соболева с бесконечномерным коядром. Поэтому методики доказательств корректности соответствующих задач весьма различны. В первом случае установление разрешимости задачи на ядре дополняется классическим результатом о пропорциональности функционалов, имеющих одинаковое ядро, в то время как во втором случае требуется решить вопрос о продолжении найденного решения на бесконечно-мерное коядро путем дополнительного требования на правую часть системы уравнений.

Полученные результаты опубликованы в статьях:

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект FSWF–2020-0022).

Список литературы

[1] *Dubinskii Y. A.* On the tangential Problem of Field Theory. Journal of Mathematical Sciences, 2021, V.259, N.2. P.51-57.

[2] *Дубинский Ю. А.* Об одной тангенциальной задаче теории поля. Проблемы Математического Анализа. 2021, T.112, C.51-57.

[3] *Dubinskii Y. A.* Kernels of Trace Functionals and Field-Theory Boundary Value Problems on the plane. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2021, 312(1), P. 150-161.

[4] *Дубинский Ю. А.* О ядрах функционалов следа и граничных задачах теории поля на плоскости. Труды МИАН им. В.А.Стеклова. 2021, т.312, С. 158-169.

Национальный исследовательский университет "МЭИ Россия.
Email: julii_dubinskii@mail.ru

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ДЮЖЕВА А.В.

В работе представлены результаты разрешимости в классе регулярных решений начально-краевых задач для гиперболических уравнений.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно–дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0, T)$ есть боковая граница Q. Далее, пусть $c(x, t)$, $f(x, t)$ и $N(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Ищется функция $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + c(x, t)u = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - \int_\Omega N(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S} = 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \qquad (4)$$

В изучаемых задачах условие (2) является нелокальным аналогом граничного условия второй начально-краевой задачи для гиперболических уравнений. Именно это условие и определяет интегральный оператор Фредгольма, использованный в работе [1]

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C(\overline{Q});$$

$$N(x,y) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q),$$

нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad u_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),$$

$$u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)).$$

Метод, используемый в работе, позволил отказаться от обратимости ранее используемого оператора Фредгольма, порожденного интегральными граничными условиями, а также от условий малости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778-2020-0005

Список литературы

[1] *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения. 2006. Т9, №42, с.1166–1179.

СамГТУ, Россия. Email: aduzheva@rambler.ru

ОБ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОТЕНЦИАЛ

ЕЖАК С.С.[1], ТЕЛЬНОВА М.Ю.[2]

Данная работа является продолжением изучения оценок первого собственного значения задач Штурма – Лиувилля с интегральным условием на потенциал, начало которого было положено Ю.В. Егоровым и В.А. Кондратьевым в [1].

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \ \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \ \gamma \neq 0, \tag{3}$$

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < \infty. \tag{4}$$

Изучаются оценки величин

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \quad \text{и} \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q).$$

Доказано (см. [2], [3]), что

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} R[Q,y] = \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Теорема 1. *Если $\gamma > 1$, $\alpha,\beta < 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_0^1(0,1)$, $u > 0$ на $(0,1)$, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*, u]$. Кроме того, u удовлетворяет уравнению*

$$u'' + mu = -x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{5}$$

и интегральному условию

$$\int\limits_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 1. \tag{6}$$

Теорема 2. 1) *Если $\gamma = 1$, $\alpha,\beta \leqslant 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant \frac{3}{4}\pi^2$.*

2) *Если $\gamma = 1$, $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 1$ или $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 1$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant 0$.*

3) *Если $\gamma = 1$, $0 < \alpha,\beta \leqslant 1$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant 0$.*

4) *Если* $\gamma > 1$, $\alpha, \beta \leqslant \gamma$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$.

5) *Если* $\gamma \geqslant 1$, $\alpha > \gamma$ *или* $\beta > \gamma$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} < 0$.

6) *Если* $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ *или* $0 < \gamma < 1$, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = -\infty$.

Теорема 3. 1) *Если* $\gamma > 1$, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ *или* $0 < \gamma \leqslant 1$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < \infty$ *(*$\beta \leqslant 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < \infty$*), то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.

2) *Если* $\gamma < 0$ *или* $0 < \gamma \leqslant 1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, *то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \pi^2$. *Если* $\gamma < -1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, *то существуют такие функции* $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, $u \in H_0^1(0,1)$, $u > 0$ *на* $(0,1)$, *что* $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*, u]$. *Кроме того, функция* u *удовлетворяет уравнению* (5) *и интегральному условию* (6).

Список литературы

[1] *Yu. V. Egorov, V. A. Kondratiev*, On spectral theory of elliptic operators. – in Operator theory: Advances and Applications. Birkhouser (1996), 1 – 325.

[2] *S. Ezhak, M. Telnova*, On conditions on the potential in a Sturm–Liouville problem and an upper estimate of its first eigenvalue. – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 333, (2020), 481 – 496.

[3] *S. Ezhak, M. Telnova*, On some estimates for the first eigenvalue of a Sturm-Liouville problem. – International Workshop QUALITDE – 2021, (2021), Tbilisi, Georgia, 66 – 69.

[1]Российский экономический университет им. Г.В.Плеханова, Россия.
Email: Ezhak.SS@rea.ru

[2]Российский экономический университет им. Г.В.Плеханова, Россия.
Email: mytelnova@yandex.ru

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ "СЛАБОЙ"ТОЧКИ ПОВОРОТА ПЕРВОГО ПОРЯДКА У ПРЕДЕЛЬГО ОПЕРАТОРА С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

ЕЛИСЕЕВ А.Г.[1], КИРИЧЕНКО П.В.[2]

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \end{cases} \tag{1}$$

где выполнены следующие условия

1) $h(t) \in C^\infty([\,0,T], R^n)$;

2) $A(t) \in C^\infty([\,0,T], \mathcal{L}(R^n, R^n))$;

3) для собственных значений предельного оператора $A(t)$:

а) $\forall t \in (\,0,T] \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$;

b) условие слабой точки поворота первого порядка при $t = 0$:

$\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t), \quad a(t) \neq 0;$

c) геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для всех $t \in [0, T]$;

4) $\operatorname{Re}\lambda_i(t) \leq 0, \quad i = \overline{1,2}, \quad$ для $\quad t \in [0, T]$;

5) $A(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t), \dim \operatorname{Im} P_1(t) = m, \dim \operatorname{Im} P_2(t) = n,$

$m + k = n,$

здесь $\dim \operatorname{Im} P_i(t), i = \overline{1,2},$ — размерность образов проектирующих операторов на собственные подпространства.

В рассматриваемой задаче (1) характер особенности сводится к наличию «слабой» точки поворота (условие 3), существенно особые сингулярности в этом случае можно найти из решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J, \\ J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

Решив (2) методом последовательных приближений, мы приходим к рядам для $J(t)$, членами которых являются "k-моментные"интегралы:

$$\begin{cases} \sigma_{1,k} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{\text{k интегралов}} ds_k \ldots ds_1, \\ \sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{\text{k интегралов}} ds_k \ldots ds_1. \end{cases} \tag{3}$$

Именно эти интегралы представляют собой многообразие функций необходимое для регуляризации задачи (1). Вместо искомого решения $u(t, \varepsilon)$ задачи (1) будем изучать вектор-функцию $z(t, \sigma, \varepsilon)$ такую, что ее сужение совпадает с искомым решением

$$z(t, \sigma, \varepsilon)|_{\sigma = \sigma_{s,k}(t,\varepsilon)} = u(t, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad k = \overline{0, \infty}$$

С учетом (1),(3), используя формулу сложного дифференцирования, можно записать задачу для расширенной функции $z(t, \sigma, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} A(t)z - \sum\limits_{s=1}^{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda_s\sigma_{s,k} - \varepsilon\sigma_{3-s,k-1})\frac{\partial z}{\partial\sigma_{s,k}} = \varepsilon\dot{z} - h(t), \\ z(0,0,\varepsilon) = u^0. \end{cases} \tag{4}$$

Задача (4) является регулярной по ε. Поэтому решение (4) будем определять в виде регулярного ряда по степеням ε, то есть

$$\hat{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\hat{z}_k,\ \hat{z}_k = \sum_{s=1}^{2}\sum_{p=1}^{\infty}\sigma_{s,k}(t,\varepsilon)z^k_{s,p}(t) + w^k(t), \tag{5}$$

где $z^k_{s,p}(t), w^k(t) \in C^\infty[0,T]$.

Подставив ряд (5) в задачу (4) , получим серию итерационных задач,из решения которых опрелеляются слагаемые ряда.

Главный член асимптотики решения после сужения запищется в виде

$$\begin{aligned} u_{gl}(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{2}U_s(t,0)(P_s(0)u^0 + \tfrac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)})e^{\frac{1}{\varepsilon}\varphi_s(t)} + \\ \sum_{s=1}^{2}\sum_{p=1}^{\infty}U_s(t,0)P_s(0)z^0_{s,p}(0)\sigma_{s,p}(t,\varepsilon) - A^{-1}(t)h(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 1. Об оценке остатка (асимтотическая сходимость). *Пусть дана задача Коши* (1) *и выполнены условия* $1) \div 5)$. *Тогда верна оценка*

$$\left\| u(t,\varepsilon) - \sum_{q=0}^{n}\varepsilon^q\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{r}z^q_{s,p}(t)\sigma_{s,p}(t,\varepsilon) + + \sum_{q=0}^{n}\varepsilon^q w_q(t)\right\|_{C[0,T]} \leqslant \mathbb{C}\cdot\varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C} \geqslant 0$ *— константа, не зависящая от* ε, *а* $z^q_{s,p}(t), w_q(t)$ *получены из решения итерационных задач при* $0 \leqslant q \leqslant n, 0 \leqslant p \leqslant r$.

Теорема 2. О предельном переходе. *Пусть дана задача* (1) *и выполнены условия* $1) \div 5)$. *Тогда:*

a) если $\operatorname{Re}\lambda_i \leq -\delta < 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(t,\varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t), \quad t \in [\delta_0, T], \quad \delta_0 > 0\text{— сколь угодно мало};$$

b) если $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, *то* $\forall\,\varphi(t) \in C^\infty[\,0,T]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\big(u(t,\varepsilon) + A^{-1}(t)h(t)\big)\varphi(t)dt = 0.$$

Список литературы

[1] *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М. Наука, 1981

[2] *Butuzov V.F., Nefedov N.N.,Schneider K.R.*,Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities.,Journal of Mathematical Sciences,2004,vol 121,№ 1,p. 1973 – 2079

[3] *А. Г. Елисеев, С. А. Ломов*, Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора., Матем. сб.,vol 173,№ 4,1986,p. 544–557

[4] *А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова*, Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота у предельного оператора., Дифференциальные уравнения и процессы управления.,2019,№ 3,p.63–73

[5] *А. Г. Елисеев.*, Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота., Дифференциальные уравнения и процессы управления., 2020,№ 2,p. 15-32

[6] *А. Г. Елисеев, П. В. Кириченко*,Решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора.,Сиб. электрон. матем. изв.,2020,vol 17,p. 51–60

[1]Московский Энергетический Институт, Россия. Email: predikat@bk.ru

[2]Московский Энергетический Институт, Россия.
Email: Pavel.Ririchenko@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЖУКОВСКИЙ Е.С.

В докладе приводятся утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений в частично упорядоченных пространствах и обсуждается их применение к исследованию неявных (т.е. не разрешенных относительно производной искомой функции) дифференциальных уравнений, к получению для таких уравнений теорем сравнения.

Пусть $(X, \preceq)$ —частично упорядоченное множество, $Y \neq \emptyset$, $y \in Y$, $F : X \times X \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, x) = y, \tag{1}$$

решение которого будем искать в некотором заданном непустом множестве $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\Xi(\mathcal{X}, F, y)$ цепей $S \subset \mathcal{X}$ таких, что

$$\forall u \in S \;\; \exists x \in X \;\; x \preceq u, \;\; F(x, u) = y.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

• *существуют* $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$ *такие, что* $x_0 \preceq u_0$ *и* $F(x_0, u_0) = y$;

- *для любых $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ таких, что $x \prec u$ и $F(x,u) = y$, найдутся элементы $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, для которых $w \preceq v \prec u$ и $F(w,v) = y$;*
- *для произвольной бесконечной цепи $S \in \Xi(\mathcal{X}, F, y)$ существуют элементы $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\forall u \in S \quad \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \quad F(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = y.$$

Тогда существует решение $x \in \mathcal{X}$ уравнения (1) такое, что $x \preceq u_0$.

Теорема 1 используется в доказательстве теоремы сравнения для системы дифференциальных уравнений

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь функции $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям: *при п.в. $t \in [0,1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $f_i(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f_i(t, \cdot, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ убывает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$, функция $f_i(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Для системы (2) получена теорема о двухстороннем неравенстве, утверждающая, что *если для некоторых абсолютно непрерывных функций ν, η выполнены неравенства:*

$$\nu(0) \geq \eta(0), \quad \dot{\nu} \geq \dot{\eta},$$

$$f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \geq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \leq 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n},$$

то существует решение задачи Коши для системы (2) с начальным условием $x(0) = \alpha$, $\eta(0) \leq \alpha \leq \nu(0)$, удовлетворяющее оценке

$$\dot{\eta} \leq \dot{x} \leq \dot{\nu}.$$

Представленные в докладе утверждения развивают результаты работ [1, 2] о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств, а также полученные в [3] теоремы сравнения для неявных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 20-11-20131.

Список литературы

[1] *Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.

[2] *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.

[3] *Жуковский Е. С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, Россия.
Email: zukovskys@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

ЗАЙЦЕВА Н.В.

Исследована следующая задача: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D),$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\, u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $h \neq 0$ — заданные вещественные числа, $u_0(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $u_0(x) \in C(\mathbb{R})$, $D = \{(x,t) |\, x \in \mathbb{R},\, 0 < t < T\}$ — область координатной плоскости Oxt, $\overline{D} = \{(x,t) |\, x \in \mathbb{R},\, 0 \leq t \leq T\}$.

Для построения решения задачи были использованы классическая операционная схема и некоторые идеи работ [1, 2]. В работе [3] показано, что необходимым условием существования решения является требование положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в уравнении, которое гарантируется выполнением условий $0 < b \leq 2a^2/h^2$ на коэффициенты a, b и сдвиг h.

Список литературы

[1] *Муравник А. Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки, 2019. Т. 105, № 5. С. 747–762.

[2] *Муравник А. Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Матем. заметки, 2020. Т. 108, № 5. С. 764–770.

[3] *Зайцева Н. В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 498, № 3. С. 37–40.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: zaitseva@cs.msu.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЗАКОРА Д.А.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A\frac{du}{dt} - Bu + \int_0^t e^{-b(t-s)}Cu(s)\,ds + g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \qquad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{1}$$

где A, B — самосопряженные положительно определенные операторы, C — самосопряженный неотрицательный оператор, $b > 0$, и

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(C). \tag{2}$$

Из (2) и неравенства Гайнца (см. [1, гл. I, § 7, теорема 7.1]) следует, в частности, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C^{1/2})$. Таким образом, операторы $Q_1 := B^{1/2}A^{-1/2}$ и $Q_2 := C^{1/2}A^{-1/2}$ ограничены.

Будем считать, что существует константа $\gamma > 0$ такая, что

$$\gamma\|A^{1/2}u\|^2 \leqslant \|B^{1/2}u\|^2 - b^{-1}\|C^{1/2}u\|^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{3}$$

Определение 1. Функция $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$, где $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, называется решением задачи Коши (1), если
1) $u(t) \in \mathcal{D}(B)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и Bu, $Au' \in C(\mathbb{R}_+; H)$;
2) в (1) выполнено уравнение при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1) *выполнены условия* (2) *и* (3). *Предположим, что* u^0, $u^1 \in \mathcal{D}(A)$, $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$, *функция* g *локально гельдерова*, $\sigma_0 = 0$, $0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,n})$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1) Задача Коши (1) *имеет единственное решение.*

2) Если $\lim\limits_{t\to+\infty}\|g(t)\| = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\|f_k'(t)\| = 0$ $(k = \overline{0,n})$, *то решение задачи* (1) *удовлетворяет соотношению*

$$\Big\|A^{1/2}\Big(u(t) - A^{-1/2}\big(Q_1^*Q_1 - b^{-1}Q_2^*Q_2\big)^{-1}A^{-1/2}f_0(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{i\sigma_k}A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Big)\Big\|^2 + \Big\|u'(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Big\|^2 = o(1), \quad t \to +\infty, \tag{4}$$

где $L(\lambda)$ — операторный пучок, определяемый по формуле

$$L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\left(Q_1^* Q_1 - \frac{1}{b}\, Q_2^* Q_2\right) + \frac{b}{b-\lambda}\, Q_2^* Q_2.$$

3) Если $g(t) \equiv 0$, $f_k'(t) \equiv 0$ $(k = \overline{0,n})$, то сходимость к нулю в (4) экспоненциальная.

В [2] аналогичная теорема доказана для неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка.

Список литературы

[1] *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

[2] *Закора Д. А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Математические заметки. 2018. Т. 103, N5. С. 702–719.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Россия.
Email: dmitry.zkr@gmail.com

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНО–ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

ЗВЯГИН А.В.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\ \left[2\mu_0\big(I_2(v)\big)\mathcal{E}(v)\right] -$$

$$-\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{Div}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)\big)\,ds + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s;t,x)\big)\,ds, \quad t,\tau \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = v_0, \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь, v — вектор–функция скорости движения частицы среды, p — функция давления, f — функция плотности внешних сил, $z(\tau;t,x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x, $\mu_1 \geqslant 0, 0 < \alpha < 1$ — некоторые константы. Здесь $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$.

Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $i,j = \overline{1,n}$, обозначается тензор скоростей деформации. Тензор $I_2(v)$ определяется равенством: $I_2^2(v) = \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \sum_{i,j=1}^{n} [\mathcal{E}_{ij}(v)]^2$. Вязкость среды $\mu_0(s)$ определена при $s \geq 0$ непрерывно дифференцируемой скалярной функцией, для которой выполнены неравенства (см. [1]):

a) $0 < C_1 \leq \mu(s) \leq C_2 < \infty$;
b) $-s\mu'(s) \leq \mu(s)$ при $\mu'(s) < 0$;
c) $|s\mu'(s)| \leq C_3 < \infty$.

Разрешимость начально–краевых задач (1)–(4) с постоянной вязкостью рассматривалась в работах [2]–[4].

Определение 1. Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Функция $v \in W_1 = \{v \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1})\}$ называется слабым решением начально–краевой задачи (1)–(4), если для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int_\Omega \mu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx +$$
$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s, z(v)(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi \rangle,$$

и начальному условию (4). Здесь $z(v)$ — регулярный лагранжевый поток, порожденный v.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. *Тогда начально–краевая задача* (1)–(4) *имеет хотя бы одно слабое решение* $v \in W_1$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-00038, https://rscf.ru/project/21-71-00038/

Список литературы

[1] *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982.
[2] *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. V. 38. N. 12. P. 6327–6350.
[3] *Звягин А. В.* О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Успехи математических наук. 2019. Т. 74. В. 3. С. 189–190.
[4] *Звягин А. В.* Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Известия Академии Наук. Серия математическая. 2021. Т. 85. В. 1. С. 66–97.

Воронежский государственный университет, Россия.
Email: zvyagin.a@mail.ru

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПРЯМОЙ СИСТЕМЫ КОЛМОГОРОВА И ОЦЕНКАХ ДЛЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

ЗЕЙФМАН А.И.

Рассматривается (конечная или счетная) прямая система Колмогорова, описывающая поведение вероятностей состояний для неоднородной марковской цепи с непрерывным временем. Это – линейная система, имеющая вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}, \qquad (1)$$

где матрица $A(t)$ с локально интегрируемыми на $[0, \infty)$ коэффициентами существенно неотрицательна, а сумма элементов по каждому столбцу равна нулю, в случае счетной системы добавляется еще условие ограниченности: $\sup_i |a_{ii}(t)| < \infty$ почти при всех $t \geq 0$, гарантирующее возможность применения результатов из [3].

Наиболее изученным является случай процессов рождения и гибели, для которых матрица $A(t)$ – трехдиагональная. Соответствующие однородные процессы (то есть ситуация, когда A не зависит от времени) возникли впервые при описании биологических задач, а затем задач, связанных с теорией массового обслуживания, см. [8, 1], а исследования неавтономной системы (1) для конкретных моделей начались в 1970-х годах, см., например, [2, 6, 7], и активно продолжаются и сейчас, см. [4, 5].

Для построения и оценивания предельных характеристик описываемых моделей основной интерес представляют оценки скорости сходимости, устойчивости, погрешности, получаемой при аппроксимациях с помощью усечений (системами меньшей размерности).

Применяемый подход основан на нескольких специальных преобразованиях системы (1), а затем исследовании преобразованной системы в соответствующим образом подобранных "весовых"пространствах последовательностей.

В докладе будут сформулированы основные понятия и результаты, опирающиеся на результаты [10, 11, 12], а также рассмотрены некоторые их расширения на случай более общего пространства состояний, см.[9].

Список литературы

[1] Гнеденко, Б. В., Коваленко, И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.

[2] Гнеденко, Б. В., Макаров, И. П. Свойства решений задачи с потерями в случае периодичности интенсивностей // Дифф. уравнения, 1971, 7(9), 1696–1698.

[3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[4] Di Crescenzo, A., Spina, S. Analysis of a growth model inspired by Gompertz and Korf laws, and an analogous birth-death process // Mathematical Biosciences, 2016, 282, 121–134.

[5] Giorno, V., Nobile, A. G. On a class of birth-death processes with time-varying intensity functions // Applied Mathematics and Computation, 2020, 379, 125255.

[6] Gnedenko, D. B. On a generalization of Erlang formulae // Zastosow. Mat, 1971, 12, 239–242.

[7] Gnedenko, B., Soloviev, A. On the conditions of the existence of final probabilities for a Markov process // Math. Operationsforsh. Statist, 1973), 4, 379–390.

[8] Kendall, D. G. On the generalized"birth-and-death"process // The Annals of Mathematical Statistics, 1948, 19(1), 1–15.

[9] Satin, Y., Razumchik, R., Zeifman, A., Kovalev, I. Upper bound on the rate of convergence and truncation bound for nonhomogeneous birth and death processes on $\mathbb{Z}$ // arXiv preprint arXiv:2110.02191, 2021.

[10] Zeifman, A., Satin, Y., Korolev, V., Shorgin, S. On Truncation for Weakly Ergodic Inhomogeneous Birth and Death Processes // Int. J. Appl. Math. Comput. 2014, Sci, 24(3), 503–518.

[11] Zeifman, A. On the Study of Forward Kolmogorov System and the Corresponding Problems for Inhomogeneous Continuous-Time Markov Chains // In Intern. Conf. Differential & Difference Equations and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2020, 333, 21–39.

[12] Zeifman, A., Korolev, V., Satin, Y. Two approaches to the construction of perturbation bounds for continuous-time Markov chains // Mathematics, 2020, 8(2), 253.

Вологодский государственный университет, Россия.
Email: a_zeifman@mail.ru

РЕШЕНИЕ ПОЛУГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ЗУБОВА С.П.[1], МОХАМАД А.Х.[2], РАЕЦКАЯ Е.В.[3]

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x} + f(t,x), \tag{1}$$

где $A : E_1 \to E_2$, E_1, E_2 — банаховы пространства; A — линейный замкнутый фредгольмов оператор с нулевым индексом, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$; $B \in L(E_1 \to E_2)$, $\not\exists B^{-1}$; $(t,x) \in T \times X$, $T = [0,t_k], X = [0,x_k]$; $f(t,x)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2; $u = u(t,x)$ искомая вектор-функция.

Под решением уравнения (1) понимается вектор-функция $u = u(t,x) \in \operatorname{dom} A$, непрерывно дифференцируемая по t и x, удовлетворяющая (1) при всех $(t,x) \in T \times X$.

Ищется решение уравнения (1) с условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in X; \quad u(t,0) = \psi(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции со значениями в E_2.

Рассматривается регулярный случай, то есть пучок $A-\lambda B$ обратим при $\lambda \in \dot{U}(0) \bigcap \mathbb{C}$. Известно [1], что $A_\lambda = (A-\lambda B)^{-1}A$: $\operatorname{dom} A \to E_1$ имеет число 0 нормальным собственным числом, то есть имеет место разложение E_1 в прямую сумму

$$E_1 = M \oplus N, \tag{3}$$

где M инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M обратимо; N — корневое подпространство для A_λ, $N = lin$ $\{v_1, v_2, \dots v_p\}$, где $\{v_i\}$ — $B-$жорданова цепочка присоединенных элементов для A, отвечающая нулевому собственному числу, p — порядок полюса оператора $(A-\lambda B)$ в окрестности точки $\lambda = 0$.

Уравнение (1) расщепляется на уравнения в подпространствах M и N. В M это дифференциальное уравнение по выделенной переменной t, В N это дифференциальное уравнение по выделенной переменной x. И одно алгебраическое соотношение $u(t,x) = Qu(t,x) + Pu(t,x)$, где Q и P — проекторы на M и N. В этом смысле уравнение (1) — дифференциально-алгебраическое.

Для решения задачи (1), (2) требуется выполнение некоторого условия согласования для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$.

Теорема 1. *При аналитической вектор-функции $\varphi(x)$, дифференцируемой p раз вектор-функции $\psi(t)$ и выполнении условия согласования для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ решение $u(t,x)$ задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Получены формулы для построения $u(t,x)$.

Список литературы

[1] *Зубова С. П, Чернышов К. И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. Вильнюс, Институт физики и математики АН Литовской ССР, 1976. Вып. 14. С.21–39.

[2] *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Решение задачи Коши для двух дескрипторных уравнений с нетеровым оператором // Доклады РАН, 2014. 459, No. 5. С. 528–532.

[3] *Zubova S. P., Mohamad A. X.* Analytical solution for descriptor system in partial differential equations // Computational Methods for Differential Equations, University of Tabriz. Springtime 2021. - V. 9, No 2, - P. 467–479.

[1]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: spzubova@mail.ru

[2]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: abdulftah.hosni90@gmail.com

[3]Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, Россия. Email: raetskaya@inbox.ru

СТРАТЕГИЯ ПЕТРОВСКОГО - ЛАНДИСА

ИЛЬЯШЕНКО Ю.С.

Стратегия Петровского - Ландиса может быть в принципе применена к любым комплексным полиномиальным динамическим системам. Если степени многочленов, задающих систему, не превосходят d, пространство коэффициентов конечномерно. Стратегия приспособлена для того, чтобы доказывать, что некоторое свойство не может быть локально типичным в пространстве коэффициентов. Предположим, что “нежелательное” свойство выполняется в некоторой области пространства коэффициентов.

Шаг 1. Теорема о сохранении. Если “нежелательное” свойство выподняется в некоторой области пространства коэффициентов, то его можно “аналитически продолжить” в любую область этого пространства.

Шаг 2. Выделить в пространстве коэффициентов область, состоящую из легко исследуемых систем, для которых “нежелательное” свойство заведомо не выполняется.

Противоречие между шагом 1 и шагом 2 доказывает, что “нежелательное” свойство не может выполняться для всех уравнений из какой бы то ни было, сколь угодно малой, области пространства коэффициентов. Эту стратегию удалось осуществить для полиномиальных автоморфизмов комплексной плоскости. Доказано [1], что почти все такие автоморфизмы не имеют гомоклинических касаний и поэтому удовлетворяют теореме Купки - Смейла.

Стратегия Петровского - Ландиса восходит к работам 50-х годов, где авторы пытались решить 16 проблему Гильберта для предельных циклов. К этой работе восходит не решенная до сих пор проблема сохранения: можно ли аналитически продолжить комплексный предельный цикл полиномиального векторного поля степени n на плоскости на все пространство таких полей? Эта жгуче интересная проблема до сих пор ждет своего решения.

Список литературы

[1] G. Buzzard, S. Hruska, Yu. Ilyashenko, Kupka–Smale theorem for polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$ and persistence of heteroclinic intersections, Inventiones Mathematicae, 161, 2005, pp 45-89

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Независимый Московский университет, Россия.
Email: yulijs@gmail.com

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА

КАЙЫРБЕК Ж.А.

Пусть m-фиксированное натуральное число. Рассмотрим смешанную задачу для системы волновых уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1},t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1},t)}{\partial x_{m+1}^2}=0, 0<x_{m+1}<b_{m+1}, t>0,\\ \frac{\partial^2 u_m(x_m,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_m(x_m,t)}{\partial x_m^2}=0, 0<x_m<b_m, t>0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial^2 u_1(x_1,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_1(x_1,t)}{\partial x_1^2}=0, 0<x_1<b_1, t>0,\end{gathered} \tag{1}$$

с условиями вида (a)

$$u_{m+1}(1,t) = u_1(0,t) = u_m(0,t)$$
$$\frac{\partial u_{m+1}(1,t)}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_m(0,t)}{\partial x_m}, t > 0 \tag{2}$$

и условиями вида (b)

$$u_{m+1}(0,t) = 0, u_1(1,t) = 0, ..., u_m(1,t) = 0, t > 0, \tag{3}$$

а также начальными условиями

$$\begin{aligned}
u_{m+1}(x_{m+1},0) &= \varphi_{m+1}(x_{m+1}), 0 < x_{m+1} < b_{m+1},\\
\frac{\partial}{\partial t}u_{m+1}(x_{m+1},0) &= \psi_{m+1}(x_{m+1}), 0 < x_{m+1} < b_{m+1},\\
u_m(x_m,0) &= \varphi_m(x_m), 0 < x_m < b_m,\\
\frac{\partial}{\partial t}u_m(x_m,0) &= \varphi_m(x_m), 0 < x_m < b_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
u_1(x_1,0) &= \varphi_1(x_1), 0 < x_1 < b_1,\\
\frac{\partial}{\partial t}u_1(x_1,0) &= \psi_1(x_1), 0 < x_1 < b_1,
\end{aligned} \tag{4}$$

Согласно результатам работы [1] задача (1), (2), (3), (4) может быть интерпретирована, как смешанная задача для волнового уравнения на графе-звезде.

В докладе формула Даламбера адаптирована для смешанной задачи (1)-(4). Приведены иллюстративные примеры распространения волн с малыми носителями вдоль графа-звезды.

Работа выполнена совместно с Б.Е. Кангужиным и при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК грант №AP 08855402 "Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений на геометрических графах и их применения при расчетах соединений упругих тонких стержней ".

Список литературы

[1] *Kanguzhin B E,Zhapsarbaeva L. K, Madibaiuly Zh.* Lagrange formula for differential operators and self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree. Eurasian mathematical journal, 2019.

Казахский национальный университет имени аль–Фараби, Институт математики и математического моделирования. Казахстан.
Email: kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

КРИТЕРИЙ МИНИМАЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

КАЛЬМЕНОВ Т.Ш.[1], КАХАРМАН Н.[2]

Пусть $\Omega \subset R^n$ конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Через Δ_0- обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора Лапласа

$$\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

на подмножестве функции $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $u\big|_{x\in\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}-$ нормальная производная, а через Δ_0^*- сопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор к Δ_0.

Оператор Δ_0- назовем минимальным оператором Лапласа Δ, а Δ_0^*- максимальным оператора Δ.

В работе найдена необходимое и достаточное условия на $f \in L_2(\Omega)$, для которых

$$\Delta_0 u = f(x), \tag{2}$$

существует решение, т.е. дается критерий обратимости минимального оператора Δ_0 в $L_2(\Omega)$. Из этого критерия в случае R^2 определяется производящая функция для двумерных гармонических функции.

Работа выполнена при поддержке МОН РК, грант AP09260126.

[1]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан. Email: kalmenov.t@mail.ru

[2]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан. Email: n.kakharman@math.kz

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ПРИ УСЛОВИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

КАМЫНИН В.Л.

Изучается однозначная разрешимость обратной задачи в прямоугольнике $Q \equiv [0,T] \times [0,l]$ для параболического уравнения

$$\rho(t,x)u_t - u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u + \gamma(x)u = f(t,x), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t), \tag{2}$$

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)\,dt = \varphi(x), \tag{3}$$

а также однозначная разрешимость обратной задачи для параболического уравнения

$$u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(t,x)u + \gamma(x)u = f(t,x), \tag{4}$$

с условиями (2),(3). В рассматриваемых задачах неизвестной является пара $\{u(t,x), \gamma(x)\}$, функция $\gamma(x)$ — неотрицательна и ограничена.

Уравнения (1) и (4) предполагаются вырождающимися:
в уравнении (1) предполагается, что

$$0 \le \rho(t,x) \le \rho_1,\ 1/\rho \in L_q(Q), q > 1, \tag{5}$$

а в уравнении (4) предполагается, что

$$0 \le a(x) \le a_1,\ 1/a_1 \in L_q((0,l), q > 1. \tag{6}$$

Для обеих задач установлены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения. Приведены примеры, для которых применимы доказанные теоремы.

Ранее в работах [1,2] была установлена однозначная разрешимость обратных задач определения коэффициента поглощения в сильно вырождающихся параболических уравнениях при дополнительном условии интегрального наблюдения вида

$$\int_0^l u(t,x)\omega(x)\,dx = \varphi(t),$$

а в работах [3,4] при условии интегрального наблюдения (3) была исследована однозначная разрешимость обратных задач определения неизвестной правой части в параболических уравнениях с условиями слабого вырождения (5) и (6).

Исследование выполнено при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Список литературы

[1] *Kamynin V. L.* Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation in the class of L_2-functions// Journal of mathematical sciences. 2020. Vol. 250, No. 2. P. 322-336.

[2] *Kamynin V. L.* Inverse Problem of Determining the Absorption Coefficient in a Degenerate Parabolic Equation in the Class L_∞// Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, Vol. 61, No. 3, P. 388–402.

[3] *Prilepko A. I., Kamynin V. L., Kostin A. B.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2018. Vol. 26, No 4, P. 523-539.

[4] *Hussein M. S, Lesnic D., Kamynin V. L., Kostin A. B.* Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2020. Vol. 28, No 3, P. 425-448.

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ Россия.
Email: vlkamynin2008@yandex.ru

О СПЕКТРЕ ДЕЛЬТАОБРАЗНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

КАНГУЖИН Б.Е.

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle .,. \rangle$ и нормой $\| \cdot \|_0$ рассмотрим замкнутый линейный оператор B с областью определения $D(B)$ плотный в H. Считаем, что

$$KerB \neq 0, Ran(B) = H, dimKerB = m <\propto .$$

На области определения $D(B)$ зададим дополнительную норму $\| \cdot \|_1$ и замыкание $D(B)$ по этой норме обозначим через W. Считаем, что дополнительная норма $\| \cdot \|_1$ сильнее исходной нормы $\| \cdot \|_0$, то есть выполняется неравенство $\| x \|_0 \leq C \| x \|_1$. Понятно, что выполнено вложение $W \subset H$. В сопряженном пространстве W^* выберем систему из m линейно независимых функционалов $U_1, ..., U_m$. Тогда найдется единственная система элементов $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ из $KerB$, подчиненная условиям

$$\langle U_t; \varphi_r \rangle = \delta_{tz}, t, z = 1, 2, ..., m$$

где $\langle U_t; \varphi_r \rangle$- означает значение функционала U_t на элементе φ_r, и δ_{tz}- символ Кронекера.

Пусть Λ_0-обратимое сужение оператора B. Оператор Λ, определим по формуле $\Lambda u = Bu$ на области определения

$$D(\Lambda) = \{u \in D(B) : u = \Lambda_0^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s(\Lambda_0^{-1} f), \forall f \in H\}.$$

Теорема 1. *Оператор* Λ*- обратимый оператор, причем*

$$\Lambda^{-1} f = \Lambda_0^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s(\Lambda_0^{-1} f), \forall f \in H. \quad (1)$$

Замечание 1. Теорема 1 утверждает, что для построения обратимого сужения Λ оператора B, кроме фиксированного обратимого сужения достаточно задать набор линейно независимых функционалов $\{U_1, ..., U_m\}$ из W^*.

Теорема 2. *Резольвента $(\Lambda-\mu)^{-1}$ оператора Λ имеет следующее представление*

$$(\Lambda-\mu)^{-1}f=(\Lambda_0-\mu)^{-1}f-\sum_{s=1}^{m}\Lambda(\Lambda-\mu)^{-1}\varphi_s\cdot U_s((\Lambda-\mu)^{-1}f). \qquad (2)$$

Замечание 2. Теорема 2 утверждает, чтобы знать значение резольвенты $(\Lambda-\mu)^{-1}$ на произвольном элементе f из H достаточно найти значение резольвенты $(\Lambda-\mu)^{-1}$ на элементах $\varphi_1,...,\varphi_m$.

Теорема 3. *Резольвента $(\Lambda-\mu I)^{-1}$ оператора Λ может быть вычислена по формуле*

$$(\Lambda-\mu I)^{-1}f=(\Lambda_0-\mu I)^{-1}f-\sum_{s=1}^{m}\varphi_s\cdot U_s((\Lambda_0-\mu)^{-1}f)+(-1)^n\frac{detH(\mu;f)}{detD(\mu)},$$

где матрицы $D(\mu)$ и $H(\mu;f)$ задаются по специальным формулам.

В докладе обсуждаются теоремы о спектре оператора Λ в случае сингулярных возмущений оператора Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК грант №AP 08855402 "Краевые задачи для систем дифференциальных уравнений на геометрических графах и их применения при расчетах соединений упругих тонких стержней ".

Казахский национальный университет имени аль–Фараби, Институт математики и математического моделирования,Казахстан.
Email: kanguzhin53@gmail.com

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

КАНГУЖИН Б.Е.[1], АКАНБАЙ Е.Н.[2], КАЙЫРБЕК Ж.[3]

В работе дано корректное определение формального оператора Лапласа с дельтаобразным возмущением. Для задания области определения указанного оператора использованы предельные значения потенциалов простых и двойного слоев. Доказано, что по набору спектров некоторых эталонных операторов можно однозначно восстановить граничные плотности потенциалов простых и двойного слоев.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – d-мерный единичный шар. Тогда известен [1, 2] вид функции Грина задачи Дирихле в Ω для оператора Лапласа. Для $x^0\in\Omega$ введем B^0_ε – шар радиуса ε с центром в x^0. Допустимыми функциями $h(x)$ считаем функции, обладающие свойствами: ***1.***

$h(x) \in W_2^2(\Omega \setminus B_\varepsilon^0)$, $\forall \varepsilon > 0$. ***2.*** $h|_{\partial\Omega} = 0$. ***3.*** Существуют конечные пределы $\gamma_s(h)$, $s = 0, \ldots, d$. Далее, для функции $h(x)$ введем функционалы в виде предельных значений потенциалов простых и двойного слоев при $s = 1, \ldots, d$:

$$\gamma_0(h) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon^0} \frac{\partial h}{\partial \nu_t} dS_t, \quad \gamma_s(h) = d \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon^0} \frac{(t_s - x_s^0)}{|t - x^0|} h(t) dS_t,$$

где ν_t – внешняя нормаль в точке t к ∂B_ε^0.

Пусть $W_{2,\gamma}^2(\Omega \setminus \{x^0\})$ класс допустимых функции $h(x)$ с некоторым дополнительным свойством. Далее рассмотрим оператор $L : W_{2,\gamma}^2(\Omega\setminus \{x^0\}) \to L_2(\Omega)$, где $Lu{=}\Delta u(x)$ при $x \in \Omega \setminus \{x^0\}$, и пусть область определения оператора L есть

$$D(L) = \big\{u \in W_{2,\gamma}^2(\Omega \setminus \{x^0\}) : \gamma_s(u) = \int\limits_{\partial\Omega} \beta_s(t) \frac{\partial u}{\partial n_t} dS_t, \quad s = 0, 1, \ldots, d\big\},$$

где $\beta_s(t)$ – фиксированный набор функций определенных на окружности $\partial\Omega$.

2. Основная часть. В работе [1] доказано, что оператор L обратим. Нами было найдено решение операторного уравнения $Lu = f$ и доказана

Теорема 1. *Область определения оператора L можно записать в виде*

$$D(L) = \big\{u \in W_{2,\gamma}^2(\Omega \setminus \{x^0\}) : V_s(u) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, d\big\}$$

с некоторым набором гармонических в Ω функций $\{K_s(\xi), s{=}0, 1, \ldots, d\}$.

Обратная задача заключается в восстановлении граничных функции $\{K_s(\xi),\ s = 0, 1, \ldots, d\}$ по некоторому набору спектров оператора L и дополнительных, так называемых эталонных операторов. Для $m \in \{0, 1, \ldots, d\}$ введем эталонный оператор $L_m : W_{2,\gamma}^2(\Omega \setminus \{x^0\}) \to L_2(\Omega)$, $L_m u = \Delta u(x)$ при $x \in \Omega \setminus \{x^0\}$ с областью определения $D(L_m) = \{u \in W_{2,\gamma}^2(\Omega \setminus \{x^0\}) : V_s(u) = 0,\ s = 0, 1, \ldots, m,\ \gamma_s(u) = 0,\ s = m + 1, \ldots, d\}$. Оператор типа L_m с тем же действием, но с другими граничными функциями $\{\widetilde{K}_s(\xi),\ s = 0, 1, \ldots, d\}$ обозначим через $\widetilde{L}_m$.

Теорема 2. *Пусть натуральное число $m \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Предположим, что спектры операторов L_{m-1} и L_m не пересекаются. Пусть спектры операторов L_m и $\widetilde{L}_m$ совпадают.*

Тогда, если $K_s(\xi){=}\widetilde{K}_s(\xi)$, $s{=}0, 1, \ldots, m - 1$ в $L_2(\Omega)$, то $K_m(\xi){=}\widetilde{K}_m(\xi)$ в $L_2(\Omega)$.

Список литературы

[1] *Kanguzhin B. E., Tulenov K. S.* Corrections of the definition of the Laplace operators with delta-like potentials. Complex Variables and Elliptic Equations, 2020. DOI: 10.1080/17476933.2020.1849164

[2] *Kanguzhin B. E.* Changes in a Finite Part of the Spectrum of the Laplace Operator under Delta-Like Perturbations. Differential Equations, 2019. DOI: 10.1134/S0012266119100082

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан.
Email: kanbalta@mail.ru

[2]Email: akanbay.yerkebulan@gmail.com

[3]Email: kaiyrbek.zhalgas@gmail.com

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

КАПЦОВ О.В.

Получены общие решения для некоторых классов линейных волновых уравнений с переменными коэффициентами. Такие уравнения описывают колебания стержней, акустические волны, а также к ним сводятся некоторые модели газовой динамики. Для построения общих решений используются специальные типы преобразований Эйлера-Дарбу – преобразования типа Леви. Эти преобразования представляют собой дифференциальные подстановки первого порядка. Для построения каждого преобразования необходимо решать два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка. Решения одного из этих уравнений находятся из решений другого с помощью дифференциальной подстановки и формулы Лиувилля. В общем случае решать эти обыкновенные дифференциальные уравнения не просто. Однако можно указать некоторую формулу суперпозиции преобразований типа Леви.

Стартуя с классического волнового уравнения с постоянными коэффициентами и используя найденные преобразования, можно строить бесконечные серии уравнений, обладающих явными общими решеними. С помощью метода Матвеева получены предельные формы итерированных преобразований. Приводятся ряд конкретных примеров уравнений обладающих общими решениями.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631).

Список литературы

[1] *Капцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит. 2009.

[2] *Капцов О. В., Мирзаохмедов М. М.* Общие решения некоторых линейных уравнений с переменными коэффициентами//Уфимский математический журнал. Т. 13, № 2 (2021) С. 36-43.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Россия.
Email: kaptsov@icm.krasn.ru

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА ДЛЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

КИСАТОВ М.А.

Работа посвящена теореме существования единственного классического решения задачи Стефана, возникающей при изучении магнитогидродинамического пограничного слоя в вязкой среде с инъекцией модифицированной среды с реологическим законом О. А. Ладыженской.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 20-11-20272.

Список литературы

[1] *Кисатов М. А.* Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А. Ладыженской. // Доклады РАН. 2021. Т. 498, С. 41–44.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: kisatov@mail.ru

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

КОЖАНОВ А.И.

Определенная на некотором числовом множестве E функция $\varphi(x)$ называется инволюцией на этом множестве, если при $x \in E$ выполняется $\varphi(\varphi(x)) = x$. Дифференциальные уравнения с инволюцией в неизвестном решении активно изучаются в последнее время, но при этом используется в основном метод разделения переменных, и рассматриваются уравнения с простейшей линейной инволюцией. В настоящем докладе будут излагаться результаты о разрешимости естественных краевых задач для некоторых классов эллиптических и параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и инволюцией общнго вида. Кроме того, будут изучены некоторые случаи уравнений с вырождением и общей инволюцией.

Уточним, что нашей целью является доказательство существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Результаты, представленные в докладе, получены в сотрудничестве с О.И. Бжеумиховой.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия.
Email: kozhanov@math.nsc.ru

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С L_1-ДАННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

КОЖЕВНИКОВА Л.М.[1], КАШНИКОВА А.П.[2]

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + M'(\mathrm{x}, u) + b(\mathrm{x}, u) = \mu, \quad \mu \in L_1(\Omega),\ \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \dots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b(\mathrm{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеют рост, определяемый обобщенной N-функцией $M(\mathrm{x}, z)$, которая не обязана удовлетворять Δ_2-условию.

I. Chlebicka в работе[1] для уравнения

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{3}$$

при некоторых условиях регулярности на функцию Музилака-Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ в случае общей меры μ доказала существование, а в случае диффузной меры μ и единственность ренормализованного решения задачи Дирихле (3), (2).

Если функция Музилака-Орлича M не удовлетворяет Δ_2-условию, то соответствующее пространство Музилка-Орлича не является рефлексивным и рассматриваемая задача значительно усложняется. Обычно, если ограничений на рост обобщенной N-функции $M(\mathrm{x}, z)$ не требуется, то предполагается, что она подчиняется условию log-гельдеровской непрерывности по переменной $\mathrm{x} \in \Omega$, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам пространства Музилака-Орлича.

В работе [2] доказано существование ренормализованного решения задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$ и неоднородной анизотропной функцией Музилака-Орлича. В работе [3] установлены существование и единственность энтропийного и ренормализованного решений задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$, показана их эквивалентность в пространствах Музилака-Орлича.

Все процитированные выше результаты получены в ограниченных областях. Для эллиптических уравнений с нестандартными условиями роста и данными в виде меры (или L_1-данными) результаты существования и единственности энтропийных и ренормализованных решений в произвольных неограниченных областях установлены в работах [4] – [6] и др. Однако, для уравнений с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака-Орлича, таких результатов нет.

Трудность обобщения на неограниченную область состоит в том, что в ней не работает аналог неравенства Пуанкаре-Соболева и теорема о компактности вложения пространства Музилака-Орлича-Соболева. Решить проблему авторам удалось благодаря добавлению в уравнение (1) слагаемого $M'(\mathrm{x}, u)$ и дополнительному требованию интегрируемости функции $M(\cdot, z)$ по Ω.

Авторами настоящей работы в пространствах Музилака-Орлича доказано существование энтропийного решения и установлено, что оно является ренормализованным решением задачи (1), (2) в произвольной (в том числе и неограниченной) области Ω, удовлетворяющей сегментному свойству. Кроме того, получены некоторые свойства и доказана единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле (1), (2), а также установлена эквивалентность таких решений.

Список литературы

[1] *I. Chlebicka* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth // Preprint https://www.researchgate.net/deref/http, 2020.

[2] *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak-Orlicz space // J. Differential Equations, **264** (2018), С.341–377.

[3] *Ying Li, Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak-Orlicz spaces // Nonlinear Analysis: Real World Applications, **61** (2021), С. 1–20.

[4] *Кожевникова Л.М.* Об энтропийном решении эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **57**:3 (2017), С. 429–447.

[5] *Kozhevnikova L.M.* On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data // Complex Variables and Elliptic Equations, **65**:3 (2020), P. 337–367.

[6] *Кожевникова Л.М.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений анизотропной эллиптической задачи в неограниченных областях с данными в виде меры // Известия вузов. Математика, 1 (2020), С. 1–16.

[1]Стерлитамакский филиал Башкирского госуниверситета, Россия.
Email: kosul@mail.ru
[2]Стерлитамакский филиал Башкирского госуниверситета, Россия.
Email: a.kashnikova98@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ

КОНДЮКОВ А.О.

Система

$$\begin{aligned} &(1-\varkappa\triangle)v_t=\nu\triangle v-(v\cdot\nabla)v-\frac{1}{\rho}\nabla p-2\Omega\times v+\frac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b,\\ &\nabla v=0,\quad \nabla b=0,\\ &b_t=\delta\triangle b+\nabla\times(v\times b), \end{aligned}\tag{1}$$

моделирует течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка [1] в магнитном поле Земли. Здесь вектор–функции v и b определяют скорость жидкости и индукцию магнитного поля соответственно, p – гидродинамическое давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости жидкости, $\Omega=\frac{1}{2}\nabla\times v$ – угловая скорость вращения жидкости, ∇ – оператор Гамильтона, δ – магнитная вязкость жидкости, μ – магнитная проницаемость жидкости, ρ – плотность жидкости.

Рассмотрим начально – краевую задачу для системы (1)

$$\begin{aligned} &v(x,0)=v_0(x),\quad b(x,0)=b_0(x),\quad x\in D,\\ &v(x,t)=0,\quad b(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial D\times R_+. \end{aligned}\tag{2}$$

где $D\in R^3$ – цилиндрическая область с границей ∂D класса C^∞.

Ранее начально-краевая задача (1)-(2) при $\varkappa=0$ была изучена в [2]. При $\varkappa\neq 0$ начально-краевые задачи различных порядков были исследованы в работах [3, 4, 5]. В рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [6] были доказаны теоремы существования и единственности решений указанных задач.

В работе [7] описан вычислительный эксперимент для начально-краевой задачи (1)-(2). Для его осуществления была произведена дискретизация (1)-(2) конечно–разносным методом [8]. В результате дискретизации исходная начально–краевая задача преобразуется к задаче Коши для систем обыкновенных нелинейных уравнений. Далее для получения численного решения задачи Коши использованы алгоритмы, основанные на явных одношаговых схемах типа Рунге–Кутты [9] седьмого порядка точности с выбором шага интегрирования. Оценка контроля точности вычислений на каждом временном шаге осуществляется по схеме восьмого порядка точности.

Список литературы

[1] *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта/А.П. Осколков/ Тр. МИ АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126 – 164.

[2] *Hide R.* On planetary atmospheres and interiors/R.Hide/Mathematical Problems in the Geophisical Sciences, 1, W.H.Raid, ed. Am. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

[3] *Сукачева Т.Г.* Фазовое пространство одной модели магнитогидродинамики /Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков/ Дифф. уравнения., 2015, т. 51, № 4, с. 495-501.

[4] *Сукачева Т.Г.* Фазовое пространство модели магнитогидродинамики ненулевого порядка /Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков// Дифф. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 8. – С. 1083-1090.

[5] *Кондюков А. О.* Обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли / А.О. Кондюков// Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. –2016. –Т.8, №3. –С. 13–21.

[6] *Матвеева О.П.* Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка/О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева/ – Челябинск, 2014.

[7] *Kadchenko S. I.* Numerical study of a flow of viscoelastic fluid of Kelvin-Voigt having zero order in a magnetic field/ S. I. Kadchenko A. O Kondyukov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 2. – P. 40-47.

[8] *Флетчер, К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 504 с.

[9] *Новиков, Е.А.* Разработка алгоритмов переменной структуры для решения жестких задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.А. Новиков/ - Красноярск, 2014. - 123 с.

Новгородский государсртвенный университет имени Ярослава Мудрого,Россия. Email: k.a.o_leksey999@mail.ru

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

КОНЕНКОВ А.Н.

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0,\ t > 0, \\ \quad u|_{t=0} &= \psi \in S'(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1}$$

где $S'(\mathbb{R}^n)$ – пространство обобщенных функций медленного роста в $\mathbb{R}^n$.

В работах [1, 2] преобразование, ядром которого является фундаментальное решение уравнения теплопроводности, впервые использовалось для характеризации гиперфункций. Затем этот метод применялся для описания различных классов функций. В частности, в [3, 4] получена некоторая характеризация распределений ψ, имеющих компактный носитель, в терминах решения задачи Коши (1).

Пусть K – выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^n$, $d_K(x)$ – расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до K и $Z(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-|x|^2/4t}$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Получена оценка, которая является некоторым уточнением утверждения из [3].

Теорема 1. *Если* $\operatorname{supp}\psi \subset K$, *то существуют положительные константы* N, C *такие, что для функции* $u(x,t) = (Z(x-\cdot,t),\psi)$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \le C(1+|x|)^N (1+t^{-N}) \exp\left\{-\frac{d_K^2(x)}{4t}\right\},\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Также мы устанавливаем обратное в определенном смысле утверждение.

Теорема 2. *Если функция u является решением задачи* (1), *удовлетворяющим неравенству*

$$(\exists N, C > 0)\ |u(x,t)| \le C(1+|x|)^N (1+t^{-N}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

и для некоторого $T > 0$ *справедлива оценка*

$$|u(x,T)| \le C(1+|x|)^N \exp\left\{-\frac{d_K^2(x)}{4T}\right\},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

то $\operatorname{supp}\psi \subset K$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени

$$\begin{cases} v_t + \Delta v &= 0, \\ \quad v|_{t=0} &= \psi. \end{cases} \tag{2}$$

Следующее утверждение, выводимое из теоремы 2, показывает, что необходимым условием разрешимости задачи (2) в классе ограниченных функций является требование (за исключением тривиального случая $\psi \equiv 0$), чтобы начальная функция не слишком быстро убывала при $x \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть для некоторого $T > 0$ функция v является в слое $D = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ непрерывным и ограниченным решением задачи* (2) *и справедлива оценка*

$$|\psi(x)| \leq C \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4T}\right\}, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $v \equiv 0$ в D.

В этом неравенстве константа в экспоненте является точной.

Список литературы

[1] Matsuzawa T. A calculus approach to hyperfunctions I // Nagoya Math. J. 1987. V. 108. P.53—66.

[2] Matsuzawa T. A calculus approach to hyperfunctions II // Transactions of the American mathematical society. 1989. V. 313. № 2. P. 619-655.

[3] *Chung S.-Y., Lee S.-M.,* The Paley-Wiener theorem by the heat kernel method // Bulletin of the Korean Mathematical Society. 1998. V. 35. № 3. P. 441-453.

[4] *Chung S.-Y., Kim D.* Paley-wiener type theorems for the temperature transform // Integral Transforms and Special Functions. 2001. V. 11. №. 2. P. 151-162.

Рязанский государственный университет, Россия.
Email: an.konenkov@gmail.com

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

КОНЕЧНАЯ Н.Н.

В первой части доклада речь пойдет о построении матриц типа Шина–Зеттла $F_{\alpha\beta}$ (см. [1, Раздел I, с.8]), таких, что квазидифференцильные выражения, порожденные ими, совпадают с дифференциальным выражением

$$l_{\alpha\beta}(y) := (py'')'' - (q^{(\alpha)}y')' + r^{(\beta)}y,$$

где $\alpha \in \{0; 1\}$, $\beta \in \{0; 1; 2\}$, и производные понимаются в смысле теории распределений.

Случай l_{00} является классическим (см. [1, Прил. А]), а случай l_{12} построен в работе [2]. Соответствующие матрицы имеют вид:

$$F_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \\ -r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -rp^{-1} & qp^{-1} & p^{-1} & 0 \\ qrp^{-1} & 2r - q^2p^{-1} & -qp^{-1} & 1 \\ r^2p^{-1} & -qrp^{-1} & -rp^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем вид матриц $F_{\alpha\beta}$ в остальных случаях:

$$F_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1} & 0 \\ -r & q & 0 & 1 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -rp^{-1} & 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & 2r + q & 0 & 1 \\ r^2p^{-1} & 0 & -rp^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & qp^{-1} & p^{-1} & 0 \\ 0 & -q^2p^{-1} & -qp^{-1} & 1 \\ -r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & qp^{-1} & p^{-1} & 0 \\ -r & -q^2p^{-1} & -qp^{-1} & 1 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как известно, условие принадлежности всех элементов $F_{\alpha\beta}$ пространству $L^1_{loc}[1, +\infty)$ обеспечивает возможность корректного определения квазидифференциального выражения, порожденного этой матрицей. Это квазидифференциальное выражение совпадает с дифференциальным выражением $l_{\alpha\beta}(y)$ с коэффициентами - распределениями (см. [1, Раздел I, с.8] и [2] для случая l_{12}).

Во второй части доклада речь пойдет об асимптотике решений уравнений вида

$$l_{\alpha\beta}(y) = \lambda y \tag{1}$$

при $x \to +\infty$, где λ – фиксированный параметр.

Сформулируем результаты, полученные нами для случая $\alpha = \beta = 1$.

Теорема 1. *Пусть $p = (1 + p_1)^{-1}$, где $p_1 \in L^1[1, +\infty)$, и пусть*

$$|r| + |q|(1 + |q|)(1 + |p_1|) \in L^1[1, +\infty).$$

Тогда в случае $\alpha = \beta = 1$ и $\lambda \neq 0$ уравнение (1) при $x \to +\infty$ имеет фундаментальную систему решений

$$y_j(x) = e^{z_j x}(1 + o(1)), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где z_j – различные корни четвертой степени из λ.

Теорема 2. *Пусть $p = (1 + p_1)^{-1}$, где $p_1 \in L^1[1, +\infty)$, и пусть*

$$|q|(1 + x|q|)(1 + |p_1|) + x^2|r| \in L^1[1, +\infty).$$

Тогда в случае $\alpha = \beta = 1$ и $\lambda = 0$ уравнение (1) при $x \to +\infty$ имеет фундаментальную систему решений

$$y_j(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}(1+o(1)), \quad j = 1,2,3,4.$$

Отметим, что для двучленных дифференицальных уравнений анлогичные результаты были получены в работе [3].

Список литературы

[1] *Everitt W. N., Marcus L.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators. AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 61, 1999.

[2] *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями. Математические заметки. 2016. Т. 99. №5. С.788–793.

[3] *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. Математические заметки. 2018. 104. №2. С.231–242.

Северный (Арктический) федеральный университет, Россия.
Email: n.konechnaya@narfu.ru

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В ДВУМЕРНОЙ ПОЛУЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

КОПЫЛОВА В.Г.[1], СОРОКИН Р.В.[2], ФРОЛЕНКОВ И.В.[3]

В данной работе рассматривается задача идентификации функции источника двумерной системы уравнений параболического типа, одно из которых содержит малый параметр при производной по времени. Подобные задачи возникают при аппроксимации систем смешанного и составного типа параболическими системами с малым параметром.

Аналогичная задача в одномерном случае рассматривались в [1]. В [2] исследована разрешимость задач Коши и первой краевой задачи для квазилинейной системы параболических уравнений с малым параметром.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in E_2\}$ рассмотрим задачу определения действительнозначных функций $\big(\overset{\varepsilon}{u}(t,x), \overset{\varepsilon}{v}(t,x), \overset{\varepsilon}{g}(t)\big)$, удовлетворяющих для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0,1]$ следующим соотношениям

$$\begin{cases} \overset{\varepsilon}{u}_t + a_{11}(t)\overset{\varepsilon}{u} + a_{12}(t)\overset{\varepsilon}{v} = \mu_{11}\overset{\varepsilon}{u}_{x_1x_1} + \mu_{12}\overset{\varepsilon}{u}_{x_2x_2} + \overset{\varepsilon}{g}(t)f(t,x), \\ \varepsilon\overset{\varepsilon}{v}_t + a_{21}(t)\overset{\varepsilon}{u} + a_{22}(t)\overset{\varepsilon}{v} = \mu_{21}\overset{\varepsilon}{v}_{x_1x_1} + \mu_{22}\overset{\varepsilon}{v}_{x_2x_2} + F(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

$$\overset{\varepsilon}{u}(0,x) = u_0(x), \quad \overset{\varepsilon}{v}(0,x) = v_0(x), \tag{2}$$

$$\overset{\varepsilon}{u}(t,x^0)=\varphi(t),\quad x^0=(x_1^0,x_2^0)-\text{фиксированная точка.}\qquad(3)$$

В предположении достаточной гладкости и ограниченности входных данных доказывается разрешимость задачи Коши (1)-(3) при каждом фиксированном ε. Доказательство производится путем сведения исходной обратной задачи к прямой, разрешимость прямой задачи доказывается методом слабой аппроксимации.

Далее при условии периодичности по x и нечетности входных данных f, F, u_0, v_0 доказывается периодичность решения задачи (1)-(3) и, следовательно, существование достаточно гладкого решения задачи определения $\big(\overset{\varepsilon}{u},\overset{\varepsilon}{v},\overset{\varepsilon}{g}\big)$ в $\overline{Q}_T=[0,T]\times[0,l_1]\times[0,l_2]$ при первом однородном краевом условии.

Далее доказываются равномерные по ε оценки, гарантирующие сходимость при $\varepsilon\to 0$ последовательности $\big(\overset{\varepsilon}{u}(t,x),\overset{\varepsilon}{v}(t,x),\overset{\varepsilon}{g}(t)\big)$ решений краевой задачи для системы (1) к решению $u(t,x), v(t,x), g(t)$ параболо-эллиптической системы

$$\begin{cases}u_t+a_{11}(t)u+a_{12}(t)v=\mu_{11}u_{x_1x_1}+\mu_{12}u_{x_2x_2}+g(t)f(t,x),\\ a_{21}(t)u+a_{22}(t)v=\mu_{21}v_{x_1x_1}+\mu_{22}v_{x_2x_2}+F(t,x).\end{cases}$$

с начально-краевыми условиям

$$u(0,x)=u_0(x),\quad v(0,x)=v_0(x),\quad x\in[0,l_1]\times[0,l_2],$$

$$u(t,0,x_2)=v(t,0,x_2)=u(t,l_1,x_2)=v(t,l_1,x_2)=0,$$

$$u(t,x_1,0)=v(t,x_1,0)=u(t,x_1,l_2)=v(t,x_1,l_2)=0$$

и условием переопределения

$$u(t,x^0)=\varphi(t).$$

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Список литературы

[1] Belov Y. Y., Kopylova V. G. Determination of Source Functions in Composite Type System of Equations // Journal of Siberian Federal University - Mathematics and Physics, 2014, 7(3), 275-288.

[2] Kopylova V. G., Frolenkov I. V. On the Solvability of the Identification Problem for a Source Function in a Quasilinear Parabolic System of Equationsin Bounded and Unbounded Domains // Journal of Siberian Federal University - Mathematics and Physics, 2021, 14(4), 483-491.

[1]Сибирский федеральный университет, Россия.
Email: kopylova.vera@mail.ru
[2]Сибирский федеральный университет, Россия.
Email: rsorokin@sfu-kras.ru
[3]Сибирский федеральный университет, Россия. Email: igor@frolenkov.ru

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ 2×2 СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

КОСАРЕВ А.П.

Рассматривается спектральная задача

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(1) = 0, \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр, $g, h, p, q, r, s \in L_1[0,1]$, обе функции g и h положительны, а функции p, q, r, s комплекснозначные.

Наша цель - получить асимптотические представления решений системы (1), а затем использовать их для нахождения асимптотики собственных значений задачи (1), (2). Для формулировки теорем об асимптотических представлениях введем обозначения

$$G(x) = \int_0^x g\,dt, \quad H(x) = \int_0^x h\,dt, \quad P(x) = \int_0^x p\,dt, \quad S(x) = \int_0^x s\,dt,$$

$$a(x) = g(x) + h(x), \quad b(x) = e^{P(x)-S(x)}.$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{P(x)} & 0 \\ 0 & e^{S(x)} \end{pmatrix}, \quad E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda G(x)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda H(x)} \end{pmatrix}.$$

Определим операторы

$$(I_1 f)(x) = -\int_x^1 q(t) b^{-1}(t) f(t)\,dt, \quad (I_2 f)(x) = \int_0^x r(t) b(t) f(t)\,dt, \tag{3}$$

$$(Df)(x) = \frac{1}{a(x)} f'(x), \quad J_1 = \frac{rb}{a} I_1, \quad J_2 = -\frac{qb^{-1}}{a} I_2. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $g, h > 0$ и все функции g, h, p, q, r, s принадлежат пространству $L_1[0,1]$. Тогда при любом $\kappa \in \mathbb{R}$ существует фундаментальная матрица $Y(x,\lambda)$ уравнения* (1)*, имеющая представление*

$$Y(x,\lambda) = M(x)(I + R(x,\lambda))E(x,\lambda), \tag{5}$$

где $R(x,\lambda)$ — голоморфная матриц-функция в полуплоскости

$$\Pi_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\,\lambda \geqslant \kappa\}$$

при достаточно больших $|\lambda|$, причем

$$\|R(,\lambda)\|_{C[0,1]} = o(1), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty,\ \lambda \in \Pi_\kappa.$$

Если функции g, h, p, q, r, s принадлежат пространству $W_1^n[0,1]$ при некотором $n \geqslant 1$, то фундаментальную матрицу $Y(x,\lambda)$ можно выбрать такой, что $R(x,\lambda)$ допускает представление

$$R(x,\lambda) = \frac{R^1(x)}{\lambda} + \ldots, + \frac{R^n(x)}{\lambda^n} + o(1)\lambda^{-n},$$

где $o(1)$ — бесконечно малая функция равномерно по $x \in [0,1]$ при $\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Pi_\kappa$.

Матриц-функции R^k вычисляются по формулам

$$R^k = \begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k \end{pmatrix},$$

$$r_{11}^1 = I_1\frac{rb}{a},\ r_{12}^1 = -\frac{qb^{-1}}{a},\ r_{21}^1 = \frac{rb}{a},\ r_{22}^1 = -I_2\frac{qb^{-1}}{a},$$
$$r_{11}^{k+1} = I_1 r_{21}^{k+1},\ r_{12}^{k+1} = (D+J_2)^k r_{12}^1,$$
$$r_{21}^{k+1} = (-D+J_1)^k r_{21}^1,\ r_{22}^{k+1} = I_2 r_{12}^{k+1}.$$

После подстановки полученных асимптотик в характеристический определитель получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть все коэффициенты уравнения* (1) *абсолютно непрерывные и, кроме того,*

$$q(1) \neq 0,\ \ r(0) \neq 0.$$

Тогда спектральная задача (1), (2) *имеет две серии собственных значений $\{\lambda^\pm\}$, имеющих асимптотику*

$$\lambda_n^\pm = \pm\frac{2\pi i}{(G(1)+H(1))}n - 2\ln n - \ln\frac{4\pi^2}{\alpha(G(1)+H(1))^2} + o(1).$$

Доклад основан на совместной работе с А.А. Шкаликовым.

Работа поддержана грантом РФФИ No 19-01-00240.

Список литературы

[1] *Birkhoff R. E., Langer R. E.* American Acad. Proc., **58**:2 (1923), 49-128.

[2] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Матем. сб., **211**:11 (2020), 129-166.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия. Email: ruterminals@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

КОШЕЛЕВА Ю.А.

Обратные задачи, которые представлены в данной работе связаны с математическим моделированием динамики популяций с учетом астрономического времени t , биологического времени a и дополнительного учета диффузии (перемешивание в процессе взаимодействия). Такие задачи сводятся к исследованию нелокальной краевой задачи для ультрапараболических уравнений.

Особый интерес вызывают нелинейные обратные задачи для ультрапараболических уравнений, ранее они не изучались (линейные обратные задачи для данного типа уравнений ранее изучались автором в $[1, 2, 3]$).

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты - бесконечно дифференцируемой) границей Γ, t есть число из интервала $(0, T)$, $0 < T < +\infty$, a есть число из интервала $(0, A)$, $0 < A < +\infty$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T) \times (0, A)$. Далее, пусть $f(x, t, a)$, $N(x, t, a)$, $u_0(x, a)$, $v_0(x, t)$, $\psi(x, t, a)$ суть заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $a \in [0, A]$ функции.

Обратная задача I: Найти функции $u(x, t, a)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_t + u_a - \Delta u + q(t)u = f(x, t, a) \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x, t, a)$ условий

$$u(x, 0, a) = u_0(x, a), \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A), \tag{2}$$

$$u(x, t, 0) = v_0(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \tag{3}$$

$$u(x, t, a)_{|(x,t,a)\in\Gamma\times(0,T)\times(0,A)} = \psi(x, t, a), \tag{4}$$

а также условия

$$\int\limits_0^A \int\limits_\Omega N(x, t, a)u(x, t, a)dxda = \mu(t), \quad x \in \Omega, \quad a \in (0, A). \tag{5}$$

Обратная задача II: Найти функции $u(x, t, a)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) при выполнении для функции $u(x, t, a)$ условий (2), (3) и (5), а также условия

$$\frac{\partial u(x, t, a)}{\partial \nu}|_{(x,t,a)\in\Gamma\times(0,T)\times(0,A)} = \psi(x, t, a),$$

$(\frac{\partial u(x,t,a)}{\partial \nu}|_{(x,t,a)\in\Gamma\times(0,T)\times(0,A)} = \sum\limits_{i=1}^n u_{x_i}(x, t, a)\nu_i$, где ν_i - компоненты вектора внутренней нормали к Γ в текущей точке x).

В обратных задачах I и II условия (2)-(4) суть условия обычной первой или соответственно второй начально-краевых задач для ультрапараболических уравнений, условие же (5) условие интегрального переопределения.

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (регулярными решениями называются решения, имеющие все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение). Во всех случаях имеет место единственность решения – как для краевых задач для «нагруженных» ультрапараболических уравнений, так и для обратных задач.

Методы исследования основаны на сведении исходной задачи к прямой краевой задаче для нагруженного ультрапараболического уравнения, использовании метода регуляризации и техники, основанной на априорных оценках.

Список литературы

[1] *Кошелева Ю. А.* О разрешимости некоторых линейных обратных задач для ультра-параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т.18, вып. 2. С.77-98.

[2] *Кошелева Ю. А.* Ультрапараболические уравнения с неизвестной правой частью // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т.19, вып. 2. С.73-93.

[3] *Кошелева Ю. А.* Линейные обратные задачи для ультрапараболических уравнений: случай неизвестного коэффициента пространственного типа. Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 3. С. 27–39.

Сахалинский государственный университет, Россия. Email: ynuta@mail.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ВЕРОЯТНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

КРАСОВИЦКИЙ Т.И.

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения Колмогорова:

$$\partial_t \mu = \partial^2_{x_i x_j}\left(a^{ij}\mu\right) - \partial_{x_i}\left(b^i \mu\right), \quad \mu_0 = \nu, \tag{1}$$

где матрица $A = \left(a^{ij}\right)$ симметрична и положительно определена, b^i — векторное поле на $\mathbb{R}^d$, а начальное условие ν — борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Решения вида $\mu = \mu_t\, dt$, где μ_t — вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$, называем вероятностными. Важной проблемой является исследование единственности вероятностного решения, в частности, построение примеров неединственности.

Пусть $d \geq 2$. Положим

$$b(x,y,z) = (B(x), C(y), D(z)), \text{ где } x, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^{d-2}, \tag{2}$$

$$B(x) = -x - 6e^{x^2/2}, \quad C(x) = -(1+y^2)\operatorname{arctg} y + \frac{2y}{1+y^2}, \quad D(z) = -z.$$

Если $d = 2$, то компонента $D(z)$ отсутствует.

Теорема 1. *Для всякой вероятностной меры ν задача Коши (1) с коэффициентом сноса $b = (B, C, D)$ и начальным условием ν имеет бесконечно много линейно независимых вероятностных решений.*

В размерности $d = 1$ такого рода примеры невозможны. Как показано в работе [2], для $a \equiv 1$ и локально ограниченной борелевской функции $b(x)$, не зависящей от времени t, вероятностное решение единственно. В случае непостоянного коэффициента a примеры неединственности можно построить и в одномерном случае. Построение таких примеров с помощью специальной замены переменных сводится к построению решений начально–краевых задач для вырождающихся параболических уравнений. Данный метод построения примеров неединственности плодотворно применялся к стационарному уравнению Колмогорова в работе [4].

Теорема 2. *Пусть a — положительная локально липшицева функция, b — локально ограниченная борелевская функция. Предположим, что*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\,dx = +\infty. \tag{3}$$

Тогда если вероятностное решение задачи Коши (1) существует, то оно единственно. Если хотя бы один из интегралов (3) сходится, то существуют локально ограниченный коэффициент сноса b и начальное распределение, для которых симплекс вероятностных решений задачи (1) бесконечномерен.

Отметим, что условия теоремы совпадают с условиями единственности вероятностного решения одномерного стационарного уравнения Колмогорова (см. [1]). Подробное изложение этих результатов можно найти в [2] и в [3].

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00432, Московским центром фундаментальной и прикладной математики и стипендией Фонда «Базис».

Список литературы

[1] *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.

[2] *Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.* О единственности вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Матем. сб. 2021. Т. 212. N 6. С. 3–42.
[3] *Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.* О неединственности вероятностных решений задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Докл. АН. Мат., инф., проц. упр. 2021. Т. 498. С. 16–20.
[4] *Красовицкий Т.И.* Вырожденные эллиптические уравнения и неединственность решений уравнения Колмогорова. Докл. АН. 2019. Т. 487. N 4. С. 361–364.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия.
Email: tik714@yandex.ru

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА СЕТИ

КУЛАЕВ Р.Ч.

Изучается уравнение четвертого порядка

$$Lu \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - h(x)u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

где Γ – геометрический граф [1, 2]. Под *дифференциальным уравнением на графе*, мы подразумеваем множество обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i, \tag{2}$$

с коэффициентами $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $r(x) \in C[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\gamma_i} p_i(x) > 0$, $r(x) > 0$ на Γ, дополняемое в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ условиями согласования

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a), \tag{3}$$

в которых коэффициенты $\beta(a)$, $\vartheta(a)$ неотрицательны и не равны одновременно нулю, и условием с третьими производными

$$\sum_{i\in I(a)} (p_i u_i'')_\nu'(a) - r(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

Определение 1. *Решением дифференциального уравнения* (1) будем называть всякую функцию $u(x)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине – условиям (3), (4).

Уравнение (1) возникает при изучении спектра задачи о колебаниях плоской сетки упруго-шарнирно сочлененных стержней [1].

Определение 2. Подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ назовем S^2-*зоной* функции $u(x)$ из $C(\Gamma) \cap C^1[\Gamma]$, если: 1) $u(x) \neq 0$ on Γ_0; 2) существует подграф $\Gamma_1 \subset \Gamma$ такой, что $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$ и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_1$; 3) $u'(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_1$.

Определение 3. Дифференциальное уравнение $Lu = 0$ и соответствующий дифференциальный оператор L, порождаемый соотношениями (2)–(4), назовем *неосциллирующими* на графе Γ, если любое нетривиальное решение этого уравнения не может иметь S^2–зоны в Γ.

Заметим, что данное определение неосциллирующего дифференциального уравнения на графе является аналогом неосцилляции в одномерном случае. Отсутствие S^2–зон у решения уравнения на $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$ означает, что решение на может иметь более трех нулей в $\mathfrak{J}$.

Считая $\partial\Gamma \neq \varnothing$, ведем в рассмотрение для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ графа Γ по две краевые задачи

$$Lu = 0,\ x \in \Gamma, \quad u(a) = 1,\ u'(a) = 0,\ u(b) = u'(b) = 0,\ b \in \partial\Gamma \setminus a, \tag{5}$$

$$Lv = 0,\ x \in \Gamma, \quad v(a) = 0,\ v'(a) = 1,\ v(b) = v'(b) = 0,\ b \in \partial\Gamma \setminus a. \tag{6}$$

Теорема 1. *Следующие свойства эквивалентны:*

(a) *каждая из задач* (5) *имеет положительное на* Γ *решение;*

(b) *существует решение* $w(x)$ *уравнения* (1) *такое, что* $w'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $\inf\limits_{x\in\overline{\Gamma}} w(x) > 0$*;*

(c) *существует положительное на* Γ *решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее граничным условиям* $u'(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, *и не равное нулю хотябы в одной вершине из* $\partial\Gamma$*;*

(d) *каждая из задач* (6) *имеет положительное на* Γ *решение;*

(e) *функция Грина краевой задачи*

$$Lu = f(x),\ x \in \Gamma, \quad u(b) = u'(b) = 0,\ b \in \partial\Gamma,$$

положительна на $\Gamma \times \Gamma$*;*

(f) *уравнение* (1) *не осциллирует на* Γ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение 075-02-2021-1552).

Список литературы

[1] Borovskikh A. V., Lazarev K. P. Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci., 119:6 (2004) 719-738.

[2] Кулаев Р.Ч. Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе // Матем. сб., 206:12 (2015), 79–118

Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия.
Email: kulaevrch@mail.ru

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СЦЕНАРИЯ ЛАНДАУ-ХОПФА ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КУЛИКОВ А.Н.[1], КУЛИКОВ Д.А.[2]

Рассматриваются краевые задачи, в которых может быть реализован сценарий перехода к турбулентности, предложенный Л.Д. Ландау и Э. Хопфом [1,2]. В работе [2] был предложен пример краевой задачи, в которой этот сценарий был реализован. В докладе будут приведены иные примеры нелинейных краевых задач, где также удается реализовать такой сценарий. При этом использован план, предложенный Ф. Такенсом (см. гл. 3 из [3]). Бифуркации инвариантных торов растущей размерности происходят благодаря каскаду бифуркаций Андронова-Хопфа.

Рассмотрим уравнение с частными производными

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon\nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u \int\limits_0^{\pi} u_t u dx, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 > 0, \nu, \sigma \in \mathbb{R}_+$. Уравнение (1) можно дополнить одним из двух видов следующих краевых условий

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \tag{3}$$

Краевые задачи (1), (2); (1), (3) были проанализированы в работах [4,5]. Отметим, что уравнение (1) является одним из вариантов обобщенного уравнения Ван дер Поля с распределенными параметрами. К краевым задачам (1), (2); (1), (3) сводится анализ одной из основных математических моделей макроэкономики, которая известна под названием "мультипликатор-аксельратор".

Если выбрать для изучения краевую задачу (1), (2), то вопрос о структуре ее окрестности может быть сведен к анализу счетной последовательности несвязанных осцилляторов

$$\dot{y}_n = i\sigma_n y_n + (\varepsilon/2)(\nu_n - |y_n|^2)y_n, \tag{4}$$

где $\sigma_n^2 = 1 + \sigma^2 n^2, \nu_n = 1 - \nu n^2$. Анализ системы дифференциальных уравнений (4) показал, что при уменьшении ν у нее, а главное у краевой задачи (1), (2) реализуется каскад бифуркаций инвариантных торов $T_1(\varepsilon) \to \ldots \to T_k(\varepsilon) \to T_{k+1}(\varepsilon) \to \ldots$, где $dim\, T_k(\varepsilon) = k$. При

$\nu \in [1/(k+1)^2, 1/k^2)$ существуют торы $T_m(\varepsilon), m \leq k$, но отсутствуют торы размерности $n > k$. При переходе величины ν из полуинтервала $(1/(k+1)^2, 1/k^2]$ в полуинтервал $(1/(k+2)^2, 1/(k+1)^2]$ происходит рождение тора $T_{k+1}(\varepsilon)$. Более того, как удается показать притягивающим будет тор наибольшей из возможных размерностей.

Аналогичный ответ был получен для краевой задачи (1), (3). Сценарий Ландау-Хопфа также может быть реализован в двух задачах из теории упругой устойчивости (см. работы [6,7]).

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2021-1397).

Список литературы

[1] *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. В. 44. №8. С. 339-342.

[2] *Hopf E.* A mathematical example displaying the feature of turbulence // Comm. Pure. Appl. Math. 1948. V. 1. №4. P. 303-322.

[3] *Broer H. W., Dumortier F., van Strien S.I., Takens F.* Structure in Dynamics. North-Holland: Elsevier, 1991.

[4] *Куликов А. Н.* Аттракторы двух краевых задач для модифицированного нелинейного телеграфного уравнения // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. №1. С. 56-67.

[5] *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* О возможности реализации сценария Ландау-Хопфа перехода к турбулентности в обобщенной модели мультипликатор-аксельратор // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» (в печати).

[6] *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* О возможности реализации сценария Ландау-Хопфа в задаче о колебаниях трубы под воздействием потока жидкости // ТМФ. 2020. Т. 203. №1. С. 78-90.

[7] *Куликов А. Н.* О реализации сценария Ландау-Хопфа перехода к турбулентности в некоторых задачах теории упругой устойчивости // Диф. уравн. 2012. Т. 48. №9. С. 1278-1291.

[1] Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия. Email: anat_kulikov@mail.ru

[2] Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия. Email: kulikov_d_a@mail.ru

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

ЛАБОВСКИЙ С.

Рассматриваются условия положительности функции Грина двухточечной краевой задачи

$$\mathcal{L}_\lambda u := (-1)^k u^{(n)} + \lambda \int_0^l u(s) d_s r(x,s) = f(x),\ x \in [0,l],\ B^k(u) = \alpha,$$

где

$$B^k(u) := (u(0), \dots, u^{(n-k-1)}(0), u(l), -u'(l), \dots, (-1)^{(k-1)} u^{(k-1)}(0)),$$

$n \geq 3$, $0 < k < n$. Функция $r(x,s)$ предполагается неубывающей по второму аргументу. Пусть $m+k$ нечетно. Обозначим λ^m (это верхний индекс, не степень) – наименьшее положительное значение λ, при котором задача $\mathcal{L}_\lambda u = 0$, $B^m u = 0$ имеет нетривиальное решение. Необходимое и достаточное условие положительности решений этой краевой задачи, удовлетворяющих условиям $f(x) \geq 0$,

$$u(0) = \dots = u^{(n-k-2)}(0) = 0,\ u(l) = \dots = u^{(k-2)}(l) = 0,$$

$u^{(n-k-1)}(0) \geq 0$, $(-1)^{k-1} u^{(k-1)}(l) \geq 0$ заключается в докритичности краевых задач с вектор-функционалами B^{k-1} и B^{k+1}. А именно, пара условий $\lambda < \lambda^{k-1}$ и $\lambda < \lambda^{k+1}$ необходима и достаточна для положительности решения задачи.

Пусть $L(0,l)$ – пространство интегрируемых на $[0,l]$ по Лебегу функций. Определим функционально-дифференциальный оператор (символ := означает *равно по определению*) равенством

$$\mathcal{L}u(x) := (-1)^k u^{(n)}(x) + \int_0^l u(s) d_s r(x,s),$$

$n \geq 3$. Пусть $Qu(x) := \int_0^l u(s) d_s r(x,s)$, $x \in [0,l]$, где $r(x,\cdot)$ — неубывающая фукнция при почти всех $x \in [0,l]$, $r(x,0) = 0$, $r(\cdot,l) \in L([0,l])$. Поэтому $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + Q$, где $\mathcal{L}_0 u := (-1)^k u^{(n)}$, Q – положительный в обычном смысле оператор. Оператор $\mathcal{L}$ будем рассматривать в пространстве AC^{n-1} функций, имеющих абсолютно непрерывную на $[0,l]$ производную $u^{(n-1)}$, с обычной нормой.

Основной целью является установление теоремы 1. С помощью оценки характеристических чисел она позволяет находить эффективные условия отрицательности функции Грина.

Пусть $E \subset AC^{n-1}$ – множество функций, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \cdots = u^{(n-k-2)}(0) = 0,\ u(l) = \cdots = u^{(k-2)}(l) = 0, \qquad (1)$$

Определение 1. Назовем задачу

$$\mathcal{L}u = f,\ B^k u = \alpha \qquad (2)$$

E-положительно разрешимой, если из $f \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $u \in E$ следует $u \geq 0$.

Определение 2. Уравнение $\mathcal{L}u = 0$ является E-неосцилляционным в интервале $[0, l]$, если любое его решение из E имеет не более $n-1$ нулей в интервале $[0, l]$, считая кратные нули столько раз, какова их кратность.

Замечание 1. Так как решение $u \in E$ уже имеет $n-2$ нулей, считая кратности, оно может иметь только один простой нуль в $(0, l)$. В этом случае, сумма кратностей нулей в точках 0 и l равна $n-2$.

Теорема 1. *Эквивалентны следующие утверждения.*

(1) *Задача* (2) *E-положительно разрешима, причем если*

$$(f, \alpha) \geq (0, 0), u \in E,\ u \not\equiv 0,$$

то $u(x) \geq \varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

(2) *Уравнение $\mathcal{L}u = 0$ E-неосцилляционно на $[0, l]$.*

(3) *$\lambda^{k-1} > 1$ и $\lambda^{k+1} > 1$.*

Третье условие эффективно проверяется с помощью теорем о дифференциальных неравенствах 2, 3.

Теорема 2. *Пусть $0 < m < n$, и существует неотрицательное решение неравенств $\mathcal{L}u = \psi \leq 0$, $B^m u = \alpha \geq 0$, $(\psi, \alpha) \neq (0, 0)$. Тогда $\lambda^m < 1$.*

Теорема 3. *Пусть $m = 0$ или $m = n$, и существует неотрицательное решение неравенств $\mathcal{L}u = \psi \leq 0$, $B^m u = \alpha \geq\not\equiv 0$. Тогда $\lambda^m < 1$.*

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Россия.
Email: labovski@gmail.com

СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА ТОЛЬКО С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

ЛЕКСИН В.П.

Рассмотрим набор функциональных квадратных комплексно-значных матриц $B_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ размера p, определенных в окрестности $U \subset \mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}^n \setminus \cup_{1 \leq i < j \leq n}\{(z_1, z_2, \ldots, z_n) |\ z_i - z_j = 0\}$ некоторой точки

$z^0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0) \in U$ комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$. Мы будем исследовать решения системы Шлезингера

$$\mathrm{d}\, B_i(z) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [B_i(z),\, B_j(z)] \frac{\mathrm{d}(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \tag{1}$$

с некоторыми начальными условиями $B_i(z^0) = B_i^0$. Здесь $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$ – это обычные коммутаторы матриц, а $\frac{\mathrm{d}(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, $1 \leq i < j \leq n$ – мероморфные дифференциальные 1-формы на $\mathbb{C}^n$. Системы Шлезингера (1) являются нелинейными матричными системами уравнений Пфаффа. Хорошо известно [1,2,3], что система (1) является вполне интегрируемой системой Пфаффа в окрестности U точки z^0 и любое ее решение $(B_1(z), B_2(z), \ldots, B_n(z))$ мероморфно продолжается на все универсальное накрытие дополнения $\mathbb{C}^n_*$. Также хорошо известно, что при $p = 2$ и $n = 4$ решение система Шлезингера [1] в классе матриц с нулевым следом редуцируется к решению уравнения Пенлеве VI (которое в свою очередь можно редуцированить при подходящих параметрах к любому из уравнений Пенлеве (I–V) и потому при заданных $p = 2$ и $n = 4$, в общем случае, решение уравнения Шлезингера выражается через трансцендентные Пенлеве. Трансцендентные Пенлеве входят в более сложный класс функций, с точки зрения теории Галуа [4], чем гипергеометрические функции, рациональные функции или полиномы. Мы укажем некоторые условия на класс матриц $B_i(z)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, в котором будем решать системы Шлезингера и тип редукции этих систем в указанном классе матриц. Будет описана редукциия системы Шлезингера к системе, когда последняя имеет решения не сложнее, с точки зрения теории Галуа, чем гипергеометрические функции, или аналогично, рациональные функции или многочлены. Все выше сказанное суммируется в следующем утверждении

Теорема 1. *Рассмотрим систему Шлезингера в классе верхнетреугольных матриц*

$$B_i(z) = (b_i^{rs}(z)),\;\; b_i^{rs}(z) = 0,\;\; r > s,\;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

с постоянными диагональными элементами $b_i^{kk}(z) = \lambda_i^k$. Пусть для каждого i диагональные элементы λ_i^k образуют арифметическую прогрессию с одной и той же разностью Δ для всех i. Тогда в классе таких матриц система Шлезингера (1)

1) редуцируется к набору линейных систем Пфаффа

$$\mathrm{d}\, b_i^{rs}(z) = (s - r)\Delta \sum_{j=1,\, j\neq i} (b_i^{rs}(z) - b_j^{rs}(z)) \frac{\mathrm{d}(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \tag{2}$$

2) редуцированная система (2) имеет базис решений представленный гипергеометрическими интегралами

$$b_i^{rs}(z) = \beta_i \int\limits_{\gamma_j} \prod_{k=1}^{n} (t - z_k)^{\beta_i^{rs}}, \ \frac{\mathrm{d}\, t}{t - z_i}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где параметры β_i^{rs} имеют значения $\beta_1^{rs} = \cdots = \beta_n^{rs} = (s-r)\Delta$, а петли γ_j в плоскости комплексной переменной переменной t, по которой ведется интегрирование выбираются таким образом, чтобы они не проходили через точки z_i, $i = 1, \ldots, n$ и чтобы подинтегральное выражение было однозначным (например, петли Похгаммера).

Список литературы

[1] *Болибрух А. А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М: МЦНМО, 2009. 200 с.

[2] *Dragovich V., Gontsov R. R. Schramchenko V.* Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves. Physica D: Nonlinear Phenomena, V.424, October 2021, 132947.

[3] *Лексин В. П.* Многомерные системы Жордана–Похгаммера и их приложения. Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 138–147.

[4] *Umemura H.* Invitation to Galois theory. in: Differential Equations and Quantum Groups, td. Laniel Bertrand at all.EMS. 2007

Государственный социально-гуманитарный университет, Россия.
Email: lexin_vp@mail.ru

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ И НЕРЕГУЛЯРНО ВЫРОЖДЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ОБЩИЙ ПОДХОД

ЛОМОВ И.С.

На примере двух эллиптических задач:

$$\varepsilon^2 u_{xx} + u_{yy} - \kappa^2(x)u = f(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=h} = 0,$$

$$u|_{x=-M} = q_1(y), \quad u|_{x=M} = q_2(y)$$

и

$$y^2 u_{yy} + u_{xx} - a^2(y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=b} = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty$$

показано, что метод регуляризации сингулярных возмущений, разработанный С.А. Ломовым [1, 2] для построения регуляризованных асимптотических решений сингулярно возмущенных уравнений, может быть успешно применен к построению решений нерегулярно вырождающихся эллиптических задач. В обоих случаях для описания особенностей решения используется спектр предельного оператора.

В случае задачи с малым параметром при старшей производной, решение вновь полученной задачи ищется методом классической теории возмущений в специальном пространстве безрезонансных решений. В случае вырожденного эллиптического уравнения решается расширенная задача. Приводятся утверждения о существовании формального и классического решений рассматриваемой задачи. Показано, как и в классической теореме Коши–Ковалевской, что решение частично наследует аналитические свойства коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Список литературы

[1] *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

[2] *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Московского университета, 2011.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: lomov@cs.msu.ru

Δ_B-ОПЕРАТОР В ДРОБНО-МЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ Δ_B-ОПЕРАТОРА НА СФЕРЕ

ЛЯХОВ Л.Н.

Символом Δ_B обозначается оператор (введен в [1])

$\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{\gamma_i}\,, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{\partial x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad \gamma_i > -1$

(при $\gamma \geq 0$ это обозначение общепринятое). Представление Δ_B-оператора в сферической системе координат приводит к равенству

$$\Delta_B = B_{n+|\gamma|-1} + \frac{1}{r^2}\Delta_{B,\Theta}, \tag{1}$$

которое позволяет практически произвольно менять размерность евклидова аргумента функции, например, из (1) в области $x > 0$ следует равенство $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} B_{\gamma_i} f(|y|)$ при $y \in \mathbb{R}_m$, $|y| = x$, $|\gamma_i| = 0$. Подобную операцию естественно называть расширением размерности евклидова векторного пространства путем введения «скрытой сферической симметрии» (термин «скрытая симметрия» введен при исследовании задач фундаментальной физики, см. введение в книге [2]). Поэтому сам оператор Δ_B формально может рассматриваться действующим в дробно-мерной области размерности $n+|\gamma|>0$. Можно исходить из определенного правостороннего интеграла Римана—Лиувилля $(I^\alpha_{b-}\varphi)(x)|_{x=0}$ (см. [3], формула (2.18)), который при целых значениях порядка $\alpha=n$ окажется интегралом по шару в $\mathbb{R}_n$. Такой подход применен в [4]. Еще отмечу работу [5], где оператор Бесселя дробного параметра назван обобщением оператора Лапласа во фрактальной среде.

Определение дробной размерности области действия оператора Δ_B можно дать, применив определение размерности Хаусдорфа. Для этого заметим, что оператор Δ_B оказывается самосопряженным при интегрировании по мере $d\mu_n^\gamma(x)=\prod_{i=1}^n |x_i|^{\gamma_i}dx,\ \gamma_i>-1$. Использование в определении размерности Хаусдорфа d_H шарового покрытия ограниченного множества в $\mathbb{R}_n$ окрестностями с мерой интегрирования $d\mu_n^\gamma$ приведет к формуле $d_H=n+|\gamma|$.

Таким образом, задачи для уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Δ_B при $\gamma_i>-1$ могут рассматриваться, вообще говоря, в области дробной размерности. Именно такая задача Дирихле поставлена в [1] и решалась методом разделения переменных на радиальную и сферические. Использовались *весовые сферические функции*, сокращенно *B-гармоники*, полученные сужением на единичную сферу однородных B-гармонических многочленов $P_m^\gamma(x)$: $\frac{P_m^\gamma(x)}{|x|^m}=P_m^\gamma\left(\frac{x}{|x|}\right)=Y_m^\gamma(x),\quad \gamma_i>-1.$

Приведем важное свойство этих функций.

Пусть $D_B^k{=}B_{\gamma_i}^{k/2}$, если натуральное k — четное и $D_B^k{=}\frac{\partial}{\partial x_i}B_{\gamma_i}^{k/2}$, если k — нечетное. Справедливы оценки (ср. с [6], с. 486)

$$\int_{S_1^+}\left[\,D_B^k P_m^\gamma(x)\,\right]\ d\mu_n^\gamma(x)\le C_1\,m^{2k}\,\|Y_m^\gamma\|_{L_2^\gamma(S_1^+)}\,,$$

$$\left|\,D_B^k P_m^\gamma(x)\,\right|\le C_2\,m^{2m+2|k|+n+|\gamma|-2}\,\|Y_m^\gamma\|_{L_2^\gamma(S_1^+)}\,.$$

Список литературы

[1] *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения. Дифференциалные уравнения, 2020. Т. 56, № 12. С. 1610-1520.

[2] *Девис П.* Суперсила. Поиск единой теории природы. М.: Мир, 1989.

[3] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. С. 687.

[4] *Ляхов Л. Н., Трусова Н. И.* Частно-интегральные операторы неотрицательных порядков в весовых пространствах Лебега. Челяб. физ.-матем. журн., 2021. Т. 6, Вып. 3. С. 289–298.

[5] *Metzler R., G1öckle W. G., Nonnenmacher T. F.* Fractional model equation for anomalous diffusion. Physica A 211, 1994. P. 13-24.

[6] *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

Воронежский государственный университет, Россия.
Email: levnlya@mail.ru

О ТОЧНЫХ ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

МАЛЫГИНА В.В.

Определение экспоненциальной устойчивости линейного дифференциального уравнения с последействием обобщает классическое определение экспоненциальной устойчивости обыкновенного дифференциального уравнения и подразумевает существование таких констант $N, \gamma > 0$, что для любого решения $x\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ справедлива оценка $|x(t)| \le Ne^{-\gamma(t-t_0)}\|\varphi\|$, где φ — определяющая решение начальная функция. В определении экспоненциальной устойчивости от постоянных N и γ требуется только существование, но опыт использования уравнений с последействием в тоеретических построениях и математических моделях приводит к выводу, что без указания оценок на N и γ или алгоритма их эффективного вычисления задача об экспоненциальной устойчивости не может считаться до конца решенной. Заметим, что для уравнений с последействием задача оценки постоянных N и γ нетривиальна уже для скалярных уравнений.

Для экспоненциально устойчивого уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_0^h x(t-s)\, dr(s) = f(t), \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $r\colon [0, h] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, f — локально суммируемая функция, предлагается эффективный метод получения двусторонних оценок фундаментального решения, позволяющий с произвольной точностью найти как показатель, так и коэффициент экспоненциальной оценки. Этот метод существенно опирается на априорное предположение о положительности фундаментального решения и качественное описание его поведения, установленное в работе [1].

Фундаментальным решением уравнения (1) назовем функцию x_0, являющуюся решением уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$ и $x_0 = 1$. Как известно [2], любое решение уравнения (1) может быть выражено через фундаментальное решение.

Обозначим $F(\lambda) = \lambda + a + \int\limits_0^h e^{-\lambda s}\, dr(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть функция r не убывает на $[0, h]$. Если при некотором вещественном $\omega > 0$ выполнены условия $F(-\omega) = 0$, $F'(-\omega) > 0$, то фундаментальное решение уравнения* (1) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\omega t} \leq x_0(t) \leq \frac{1}{F'(-\omega)} e^{-\omega t}.$$

Теорема 2. *Пусть функция r не возрастает на $[0, h]$. Если при некотором вещественном $\omega > 0$ выполнено условие $F(-\omega) = 0$, то фундаментальное решение уравнения* (1) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{(\omega - a)h} e^{-\omega t} \leq x_0(t) \leq e^{-\omega t}.$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, госзадание FSNM-2020-0028.

Список литературы

[1] *Чудинов К. М.* Асимптотика положительных решений автономного дифференциального уравнения с последействием // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015), Воронеж, 21-26 сент. 2015 г.: Сб. тр. конф. Воронеж, Научная книга, 2015. С. 386–388.

[2] *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия. Email: mavera@list.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

МАТВЕЕВА И.И.

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau(t)) + C(t)\dot{y}(t - \tau(t)) \\ + F(t, y(t), y(t - \tau(t)), \dot{y}(t - \tau(t))), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами, $\tau(t)$ — функция, определяющая запаздывание, $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$,

$$0 < \tau_0 \le \tau(t) \le \tau_1 t + \tau_2, \quad 0 \le \tau_1 \le 1, \quad \tau_2 > 0, \quad \dot{\tau}(t) \le \tau_3 < 1,$$

$F(t,u_1,u_2,u_3)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Мы предполагаем, что $F(t,u_1,u_2,u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le \sum_{j=1}^{3} q_j \|u_j\|^{1+\omega_j}, \quad t \ge 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n,\ q_j,\ \omega_j \ge 0.$$

Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [1]–[8]). Используя функционалы Ляпунова – Красовского специального вида, установлены оценки решений систем вида (1) на полупрямой $\{t > 0\}$. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

Список литературы

[1] *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

[2] *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

[3] *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

[4] *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063-1079.

[5] *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 96–103.

[6] *Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. V. 2020, No. 20. P. 1–12.

[7] *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

[8] *Матвеева И. И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3. С. 583–598.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия.
Email: matveeva@math.nsc.ru

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

МАТВЕЕВА О.П.

Система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} (1-æ\nabla^2)v_t=\nu\nabla^2 v-(v\cdot\nabla)v+ \\ \sum\limits_{m=1}^{r}\sum\limits_{s=0}^{n_m-1}A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s}-\nabla p, \qquad 0=\nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w_{m,0}}{\partial t}=v+\alpha_m w_{m,0}\ , \qquad m=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \\ \dfrac{\partial w_{m,s}}{\partial t}=s w_{m,s-1}+\alpha_m w_{m,s}\ , \\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n_m-1, \alpha_m\in R_-, \quad A_{m,s}\in R_+, \end{array}\right. \tag{1}$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка [1]. Функция $v=(v_1,\ \ldots,\ v_n)$, $v_i=v_i(x,t),\quad x\in\Omega$ ($\Omega\subset R^n$, $n=2,\ 3,\ 4,$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞) имеет физический смысл скорости течения, функция $p=p(x,t)$ отвечает давлению жидкости. Параметры $\nu\in R_+$ и $æ\in R$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $A_{m,s}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления [2].

Рассмотрена задача Коши–Дирихле для системы (1)

$$\begin{array}{l} v(x,0)=v_0(x), \quad w_{m,p}(x,0)=w^0_{m,p}(x), \quad \forall x\in\Omega, \\ v(x,t)=0, \quad w_{m,s}(x,t)=0, \quad \forall(x,t)\in\partial\Omega\times R \\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ n_m-1. \end{array} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in B$. *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(u_0)$ *существует единственное решение задачи* (1), (2), *являющееся квазистационарной траекторией,*

$$u = (u_\sigma,\ 0,\ \bar{p},\ w_{10},\ \dots,\ w_{r0},\ w_{11},\ \dots,\ w_{1l_1},\ \dots,\ w_{r1},\ \dots,\ w_{rl_r})$$

класса $C^\infty((-t_0,t_0);U)$ *и такое, что* $u \in B$ *для всех* $t \in (-t_0,t_0)$, *где*

$$B = \{u \in \tilde{U} : A^{-1}_{æ\pi}\Pi A^{-1}_{æ}\tilde{B}(u_\sigma) = u_p,$$

$$u_\pi = 0\ , u_\sigma \in \mathbf{H}^2_\sigma\ ,\ u_i \in \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi\ ,\quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ K\} -$$

фазовое пространство задачи (1), (2).

Список литературы

[1] *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кльвина-Фойгта и Олдройта/ А.П. Осколков // Труды матем. ин-та АН СССР. – 1988. - № 179. – С. 126 - 164.

[2] *Матвеева О.П.* Математические модели вязкоупругих несжимаемых жидкостей ненулевого порядка/О.П. Матвеева, Т.Г. Сукачева, Челябинск. 2014.

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия. Email: oltan.72@mail.ru

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ ПОРОД

МЕЙРМАНОВ А.М.

В предлагаемом выступлении будут рассмотрены математические модели, описывающие физические процессы в горных породах, в областях с неизвестными (**свободными**) границами. Это математические модели нефтяного резервуара, математические модели рудного тела при добыче редких металлов методом подземного выщелачивания и математические модели, описывающие динамика фаз поровой жидкости при внешних колебаниях температуры.

Мы следуем методу, предложенному R. Burridge и J. B. Keller [1] и E. Sanchez-Palencia [2], заключающийся в с следующей последовательности шагов:

(а) рассматриваемый физический процесс на микроскопическом уровне (средний масштаб описания десятки микрон) описывается с помощью классических уравнений механики сплошных сред (**точная модель**),

(б) выделяется **набор малых безразмерных параметров**,

(в) макроскопические математические модели (средний масштаб описания несколько метров) есть строгие асимптотические пределы (**усреднения**) точных математических моделей на микроскопическом уровне при стремлении выделенных малых параметров к нулю.

Для предельного перехода при стремлении малых параметров к нулю используются метод двух-масштабной сходимости Nguetseng G. [3] для случая сред с одной пористостью и метод повторного усреднения Allaire G., Briane M. [4] для случая сред с двойной пористостью.

Список литературы

[1] *Burridge R.* Poroelasticity equations derived from microstructure, J. Acoust. Soc. Am. vol. 70, issue 4, 1981, 1140 – 1146.

[2] *Sanchez-Palencia E.* Неоднородные среды и теория колебаний, М.: Наука, 1984.

[3] *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal., V. 20, issue 3, 1989, pp. 608 – 623.

[4] *Allaire G., Briane M.* Multiscale convergence and reiterated homogenization, Proc. Royal Soc. Edinburgh, V. 126 A, 1996, pp. 297-342.

Московский Государственный Строительный Университет, Россия.
Email: anvarbek@list.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗНАЧЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ

МИРЗОЕВ К.А.[1], САФОНОВА Т.А.[2]

Символом $\zeta(s)$, как обычно, обозначим дзета-функцию Римана, а символами $\beta(s)$, $\lambda(s)$ и $\eta(s)$ - родственные с ней функции, определяемые равенствами

$$\beta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s},\qquad \lambda(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s},\qquad \eta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

и связанные с $\zeta(s)$ соотношениями

$$\lambda(s)=(1-2^{-s})\zeta(s),\quad \eta(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s).$$

Функцию $\beta(s)$ называют бета-функцией Дирихле, а числа $\beta(2)$ и $\zeta(3)$ принято называть постоянными Каталана и Апери соответственно. Хорошо известны формулы Эйлера

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m},\ \ m=1,2,\dots$$

$$\beta(2m+1)=\frac{(-1)^m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{2(2m)!}E_{2m},\ \ m=0,1,\dots,$$

где B_{2m} и E_{2m} — числа Бернулли и Эйлера соответственно. Особо отметим, что никаких подобных формул для $\zeta(2m+1)$, $\beta(2m)$ не существует, и об арифметической природе этих чисел мало что известно.

Нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов получать формулы для сумм некоторых сходящихся числовых рядов и новые интегральные представления для некоторых специальных функций. Этот метод, в частности, позволяет установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $-1 < a < 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a\cos\frac{a\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin ax}{\sin x} dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2\cos\frac{a\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos ax - \cos\frac{a\pi}{2}}{\cos x} dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2 - a^2} = \frac{1}{a\sin a\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin ax}{\sin x}\right)^2 dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^2 \sin a\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin a\pi - \sin 2ax)\,\mathrm{tg}\, x dx.$$

Подобные тождества имеют особое значение, поскольку их левые части, очевидно, являются производящими функциями для чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$, $\eta(2m-1)$ и $\zeta(2m+1)$ при $m \in \mathcal{N}$.

Из теоремы 1 можно извлечь довольно обширную информацию о представлении чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$, $\eta(2m-1)$ и $\zeta(2m+1)$ в виде определенных интегралов от элементарных функций; в виде быстро сходящихся числовых рядов, содержащих $\zeta(2n)$; в виде линейных комбинации обобщенных гипергеометрических рядов ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$; в виде пределов некоторых числовых последовательностей; в виде кратных числовых рядов и др., часть из которой известна, а часть - является новой. Доклад посвящен этому кругу вопросов.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 20-11-20261.

[1]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: mirzoev.karahan@mail.ru

[2]Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: t.Safonova@narfu.ru

НЕПЛОСКИЕ ФРОБЕНИУСОВЫ МНОГООБРАЗИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

МОХОВ О.И.

Вводится понятие неплоских неассоциативных фробениусовых многообразий, которые обобщают понятие плоских многообразий Дубровина–Фробениуса, локально задаваемых решениями классических плоских уравнений Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде (уравнений ВДВВ). Неплоские фробениусовы многообразия локально описываются неплоскими уравнениями Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде (неплоскими уравнениями ВДВВ), естественно возникающими в многомерной суперсимметричной механике (см. [1]) и в теории подмногообразий с потенциалом нормалей в псевдоевклидовых пространствах, развитой автором в [2]. Ранее автором было доказано, что классические уравнения ВДВВ являются естественными специальными редукциями фундаментальных уравнений теории подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах и любое многообразие Дубровина–Фробениуса может быть локально реализовано как некоторое специальное плоское подмногообразие с плоской нормальной связностью в псевдоевклидовом пространстве. В докладе будет показано, что неплоские уравнения ВДВВ также являются естественными специальными редукциями фундаментальных уравнений теории подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах и любое неплоское фробениусово многообразие может быть локально реализовано как некоторое специальное подмногообразие с потенциалом нормалей в псевдоевклидовом пространстве.

Исследование выполнено на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20214.

Список литературы

[1] *Kozyrev N., Krivonos S., Lechtenfeld O., Nersessian A., Sutulin A.* Curved Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde equation and $\mathcal{N} = 4$ mechanics, Physical Review D, 96, 101702(R) (2017).

[2] *Мохов О. И.* Двойственность в специальном классе подмногообразий и фробениусовы многообразия, Успехи математических наук, 63:2(380) (2008).

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Россия. Email: mokhov@mi-ras.ru

РЕНОРМАЛИЗОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КОМПАКТНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

МУКМИНОВ Ф.Х.[1], БУЛГАКОВА Г.Т.[2]

Доказывается существование ренормализованного решения эллиптической задачи на компактном римановом многообразии $\mathcal{M}$ с краем. Слабое решение подобной задачи с сингулярным потенциалом в случае области в $\mathbb{R}^n$ рассматривалось в $\mathbb{R}^n$ [1]. Там же отмечалось, что такие задачи представляют определенный физический интнрес. Рассмотрим задачу

$$-\mathrm{div}_g(a(x,u,du)) + \Lambda u + Ku = f, \quad u|_{\partial\mathcal{M}} = 0; \quad f \in L_1(\mathcal{M}). \qquad (1)$$

Линейный оператор $Ku : \mathcal{H}^1_{p(\cdot)}(\mathcal{M}) \to (\mathcal{H}^1_{p(\cdot)}(\mathcal{M}))^*$ компактен,
$\Lambda u = -\mathrm{div}_g(F\nabla_g u)$, где векторное поле $F\nabla_g u$ в локальной системе координат вычисляется по формуле $F^k_i g^{ij} u_{x^j}$. Функции $F^k_i(x)$ принадлежат $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$, и при любом $x \in \mathcal{M}$ элементы $F^k_i(x)$ задают неотрицательно определенную матрицу. Мультипликатор $\mu \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ может служить примером оператора K, если он подчиняется оценке

$$\langle \mu\varphi, \psi\rangle = \langle \mu, \varphi\psi\rangle \le C\|\,\varphi\|_{p(\cdot),1}\|\,\psi\|_{p(\cdot),1}, \qquad \forall \varphi,\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{M}).$$

Векторное поле a при $r \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям ограниченности с $q < p(x)$

$|a(x,r,y)|_g^{p'(x)} \le C(G(x) + |r|^q + |y|^{p(x)})$, монотонности при $y \ne z$

$(a(x,r,y) - a(x,r,z), y - z) > 0$, коэрцитивности

$(a(x,r,y),y) \ge 2\delta_0|y|^{p(x)} - G(x)$, где $G(x) \in L_1(\mathcal{M})$, $y,z \in T^*_x\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{M}$.

Пространство $\mathbb{B}_{p(\cdot)}(\mathcal{M})$ – пополнение $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ по норме

$$\|u\|_{p(\cdot),\Lambda} = \|u\|_{p(\cdot),1} + \sqrt{\langle \Lambda u, u\rangle}.$$

Положим $T_k(r) = \max(-k, \min(r,k))$.

Определение 1. Измеримая функция u называется ренормализованным решением задачи Дирихле (1), если она удовлетворяет соотношениям: при всех $k > 0$ $T_k(u) \in \mathbb{B}_{p(\cdot)}(\mathcal{M})$;

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathcal{M}, k \le |u| \le k+1} (a(x,u,du),du)d\nu = 0;$$

при всех $\xi \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (a(x,u,du), d(v\xi(u)))d\nu + \langle \Lambda u + Ku, v\xi(u)\rangle = \langle f, v\xi(u)\rangle. \qquad (2)$$

Пусть существуют такое число $A > 1$, что

$$\langle \Lambda u + Ku, u \rangle + \delta_0 \int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla_g u|_g^{p(x)} d\nu \geq 0, \qquad u \in \mathbb{B}_{p(\cdot)}(\mathcal{M}), \tag{3}$$

при $\|u\|_{p(\cdot),1} \geq A$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия на* a, F, K *и* (3). *Тогда существует ренормализованное решение задачи* (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия на* a, F. *Пусть* $a = a(x, y)$, *условие коэрцитивности выполнено с* $G = 0$ *и условие* (3) *с* $A = 0$. *Тогда решение задачи Дирихле* (1) *единственно.*

Список литературы

[1] *Vildanova V.F., Mukminov F.Kh.* Perturbations of Nonlinear Elliptic Operators by Potentials in the Space of Multiplicators, J. Math. Sci. 257:5 (2021), 569–578.

[1]Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия. Email: mfkh@rambler.ru

[2]Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия. Email: bulgakova.guzel@mail.ru

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ТРИАНГУЛЯРИЗАЦИИ МАТРИЦ И УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МУЛЮКОВ М.В.

Рассмотрим семейство систем дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k x\big(t - r_k(t)\big) = \mathbf{0}, \quad t \geqslant 0, \\ x(\xi) = \psi(\xi), \quad [-\omega; 0], \end{cases} \tag{1}$$

в следующих обозначениях и предположениях: A_k — вещественные 2×2-матрицы, функции $r_k : [0; +\infty) \to [0; \omega_k]$ измеримы, $\omega = \max_k \omega_k$, ψ — суммируемая вектор-функция.

В данных предположениях решение задачи Коши для любой системы (1) существует и единственно в пространстве абсолютно непрерывных вектор-функций.

Под *равномерной экспоненциальной устойчивостью* системы будем понимать следующую оценку матрицы Коши данной системы: $\exists M, \sigma > 0\colon \big\|C(t, s)\big\| \leq Me^{-\sigma(t-s)}$ при $t \geqslant s$.

Говорят, что матрицы *одновременно триангуляризуемы*, если существует невырожденное преобразование базиса T, в котором обе матрицы принимают верхнюю треугольную форму. Известно [1, 2], что матрицы $A_1, \ldots A_n$ одновременно триангуляризуемы в том и только том случае, если:

$$\forall k, m = \overline{1, n}\colon\ \det(A_k A_m - A_m A_k) = 0. \tag{2}$$

Пусть выполнено (2). Обозначим через $a_k^{(m)}$ собственное число матрицы $T^{-1}AT$, расположенное в m-ой строке. Все собственные числа неотрицательны и вещественны если и только если

$$\forall k = \overline{1, n}\colon\ \det A_k \geqslant 0 \text{ и } \operatorname{Sp} A_k \geqslant 2\sqrt{\det A_k}. \tag{3}$$

Рассмотрим две задачи Коши ($m = \overline{1, 2}$):

$$\begin{cases} \dot{y}_m(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^{(m)} y_m\big(t - \omega_k\big) = 0, \quad t > 0, \\ y_m(\xi) = 1, \quad \xi \in [-\omega; 0], \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через l_m точку первого минимума решения y_m (случай $l_m = \infty$ не исключается).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3)*. Для того чтобы каждая система семейства* (1) *была равномерно экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $m = \overline{1, 2}$ *решение задачи* (4) *удовлетворяло одному из двух условий:*

- $5\omega/3 < l_m \leqslant \infty$,
- $l_m \leqslant 5\omega/3$ *и* $y_m(l_m) > -1$.

Доказательство. В условиях теоремы после преобразования базиса второе уравнение системы семейства (1) совпадает с (4) при $m = 2$. Необходимое и достаточное условие устойчивости семейства таких скалярных уравнений получено в [3]. Первое уравнение содержит как x_1, так и x_2. Однако, если перенести x_2 в правую часть, то используя формулу Коши нетрудно показать, что из экспоненциальной оценки x_2 и функции Коши для первого скалярного уравнения вытекает экспоненциальная оценка x_1.

Список литературы

[1] *Florentino C. A. A.* Simultaneous similarity and triangularization of sets of 2 by 2 matrices // Linear Algebra and its Applications. 2009. № 431(9). P. 1652-1674.

[2] *Мулюков М. В.* О разделении уравнений некоторых систем // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. № 5(18). С. 2617-2619.

[3] *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Матем. 2013. № 7. С. 3-15.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Россия. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия. Email: mulykoff@gmail.com

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАЗАЙКИНСКИЙ В.Е.

В докладе рассматриваются две ситуации:

1. Разностные уравнения на многомерной решетке с малым шагом h. Простейшим примером может служить уравнение

$$\left[\cos\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right) - \omega\cos\left(ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}, \qquad (1)$$

$\omega \in (0,1)$, возникающее при изучении задачи Коши для волнового уравнения на бесконечном однородном дереве со специальными условиями (типа условий Кирхгофа) в вершинах [1, 2], а также (при $\omega = 1/\sqrt{2}$) в задаче о шашках Фейнмана [3, 4].

2. Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных с коэффициентами, включающими действие дискретной группы сдвигов. Здесь в качестве модельного примера можно рассмотреть нелокальное уравнение Шредингера

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi + \int K(x,y)\psi(y,t)\,dy,$$

где ядро имеет специальный вид $K(x,y) = a(\delta(x-y-1) + \delta(x-y+1))$ с вещественным коэффициентом $a = a(x)$.

В обоих случаях предъявляется конструкция квазиклассических асимптотических решений, основанная на каноническом операторе Маслова (см. [5, 6, 7]), а в случае 2 — также на идеях и методах теории нелокальных (псевдо)дифференциальных операторов (см., например, [8]).

Результаты получены совместно с В. Л. Чернышевым и А. В. Цветковой (п. 1) и А. Ю. Савиным (п. 2).

Исследования В. Е. Назайкинского и А. Ю. Савина поддержаны РФФИ, грант 21-51-12006 ННИО_а.

Список литературы

[1] *Tsvetkova A. V.* Distribution of energy of solutions of the wave equation on singular spaces of constant curvature and on a homogeneous tree // Russ. J. Math. Phys. – 2016. – Vol. 23. – N. 4. – P. 536–550.

[2] *Цветкова А. В., Шафаревич А. И.* Задача Коши для волнового уравнения на однородном дереве // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – Вып. 6. – С. 923–931.

[3] *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.

[4] *Skopenkov M., Ustinov A.* Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory. arXiv:2007.12879.

[5] *Маслов В. П.* Теория возмущений и асиптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.

[6] *Maslov V. P.* The characteristics of pseudo-differential operators and difference schemes // Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 755–769.

[7] *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах // Изв. РАН. Сер. матем. – 2017. – Т. 81. – Вып. 2. – С. 53–96.

[8] *Nazaikinskii V.E., Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. Nonlocal Elliptic Operators. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2008.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
Email: nazaikinskii@yandex.ru

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

НАМСАРАЕВА Г.В.

Будем исследовать разрешимость линейных обратных задач для дифференциальных уравнений соболевского типа

$$\triangle u_t + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{1}$$

$$\triangle u_{tt} + Bu = f(x,t) + q(x)h(x,t), \tag{2}$$

где оператор B имеет вид $Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)v_{x_j}) + b_0(x)v$, (здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Особенностью изучаемых задач является то, что искомая правая часть в них определяется неизвестным множителем, зависящим лишь от пространственных переменных. При этом условие переопределения, обусловленное наличием неизвестного коэффициента, имеет вид

$$u(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Ранее подобные задачи для уравнений составного типа изучались для некоторых частных случаев. Метод исследования в работе заключается в переходе от обратной задачи к новой уже прямой задаче для уравнений составного типа (см. [1]).

В данной работе для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Список литературы

[1] *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия. Email: gerel@inbox.ru

О “КВАНТОВАНИИ” ОДНОЙ ИЗ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ КИМУРЫ

ПАВЛЕНКО В.А.

В настоящее время совеременные ученые интересуются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), допускающие применение метода изомонодромной деформации (ИДМ). На сегодня известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем ОДУ

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{p_j} \quad (k = 1, 2) \quad (j = 1, 2) \tag{1}$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \tag{2}$$

$$V'_{\eta} = AV, \tag{3}$$

где квадратные матрицы L_{s_k} и A одинаковой размерности рациональны по переменной η. Соответствующие решения ОДУ, являющихся условием совместности таких пар, называются изомонодромными. К числу таких изомонодромных совместных решений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы относятся и решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Х. Кимуры [1].

Предстоящий доклад будет посвящен построению совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{3+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы H^{3+2} из статьи [1]. Данные аналоги уравнений Шредингера представляют собой линейные эволюционные уравнения с временами s_1 и s_2, каждое из которых зависит от двух пространственных переменных.

Построенные решения являются явными в терминах решений линейной системы ОДУ, которая выписана в статье Накамуры, Каваками и Саккая [2].

Следует отметить, что некоторые решения соответсвующих аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых другими гамильтонианами уже построены. Некоторые из них автором совместно с Сулеймановым Б.И.

Список литературы

[1] *H. Kimura.* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

[2] *H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai.* Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations. arXiv:1209.3836 (2012).

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия.
Email: mail@pavlenco.ru

СИНГУЛЯРНОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ПАВЛОВА Н.Г.[1], РЕМИЗОВ А.О.[2]

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Delta(x,y)\frac{dp}{dx} = M(x,y,p), \quad p = dy/dx, \tag{1}$$

где $\Delta(x,y)$, $M(x,y,p)$ – гладкие функции, причем M – аналитическая по p. Особыми точками этого уравнения называются такие точки (x,y)-плоскости, в которых Δ обращается в нуль, в случае общего положения они образуют кривую Γ на плоскости. Рассмотрим начальную задачу для уравнения (1) с условием $y(x_0) = y_0$.

Если точка $q_0 = (x_0, y_0)$ неособая, то для каждого p_0 эта задача имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $p(x_0) = p_0$, которое определено и является гладким на некотором интервале вещественной прямой, содержащем точку x_0, причем не существует решений, не имеющих предела $\lim p(x)$ при $x \to x_0$. Ситуация становится более сложной, если точка q_0 – особая. Например, могут быть *осциллирующие решения*, входящие в q_0 без определенного направления касательной. Последнее означает отсутствие (конечного или бесконечного) предела $\lim p(x)$ при $x \to x_0$, причем $p(x)$ в самой точке x_0 может существовать или не существовать.

Пример 1. Уравнение $x^4 dp/dx = 2x^3 p - (2x^2+1)y$ имеет семейство решений, заданных формулой $y(x) = x^2(\alpha \cos x^{-1} + \beta \sin x^{-1})$ с произвольными постоянными α, β при $x \neq 0$, и $y(0) = 0$. Все определенным таким образом функции дифференцируемы во всех точках вещественной прямой, но их производные имеют в нуле разрыв второго рода, за исключением лишь тождественно нулевого решения.

Теорема 1. *Пусть $q_0 \in \Gamma$ и $M(q_0, p) \not\equiv 0$. Тогда уравнение* (1) *не имеет осциллирующих решений, входящих в q_0.*

Далее мы будем рассматривать уравнение (1), в котором M – многочлен третьей степени по p с коэффициентами, гладко зависящими от x, y, которые не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке кривой Γ. По теореме 1, такое уравнение не имеет осциллирующих решений, и далее речь пойдет о «классических» решениях, входящих в особую точку с определенным направлением касательной.

Теорема 2. *Решения уравнения* (1) *могут входить в точку $q_0 \in \Gamma$ лишь в направлениях, соответствующих вещественным корням кубического многочлена $M(q_0, p)$, т.е. особым точкам векторного поля*

$$\Delta(\partial_x + p\partial_y) + M\partial_p. \tag{2}$$

Пусть $q_0 \in \Gamma$ и $M(q_0, p_*) = 0$. Число и поведение решений, входящих в точку q_0 с направлением p_*, определяется отношением величин

$$\lambda_1 = (\Delta_x + p\Delta_y)(q_0, p_*), \quad \lambda_2 = M_p(q_0, p_*),$$

которые являются гладкими инвариантами ростка поля (2) в особой точке (q_0, p_*). Предположим, что $\lambda_{1,2} \neq 0$, и положим $\lambda = \lambda_2 : \lambda_1$. Тогда имеет место следующий результат:

Теорема 3. *Если $\lambda < 0$, то уравнение имеет одно решение, проходящее через точку q_0 с касательным направлением p_*. Если $\lambda > 0$, то уравнение имеет бесконечное число решений, входящих в q_0 с касательным направлением p_*. Существуют локальные координаты с началом в q_0, в которых кривая особых точек Γ совпадает с осью $x = 0$ и все эти решения имеют одну из двух возможных форм:*

$$y = F(x, c|x|^\lambda), \quad \text{если} \ \ \lambda \notin \mathbb{N},$$
$$y = F(x, x^\lambda(c + \varepsilon \ln|x|)), \quad \varepsilon \in \{0, 1\}, \quad \text{если} \ \ \lambda \in \mathbb{N},$$

где F – гладкая функция двух переменных, $c = \mathrm{const}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-01-00610.

[1]Российский университет дружбы народов, Россия. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия.
Email: pavlova-ntg@pfur.ru

[2]Московский физико-технический институт, Россия.
Email: alexey-remizov@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

ПЕРЕВОЗЧИКОВА К.В.[1], МАНАКОВА Н.А.[2]

Рассмотрим функциональные пространства $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$. Положим пространство $\mathfrak{H}^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = L_q(\Omega)$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x,u) = \varkappa \int_0^T \|x - z_d\|_{\mathfrak{B}}^p dt + (1-\varkappa) \int_0^T \|u\|_{\mathfrak{B}^*}^q dt \to \inf, \ \varkappa \in (0,1) \tag{1}$$

решениями задачи Шоуолтера–Сидорова–Дирихле

$$(\lambda \mathbb{I} + \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0, \ s \in \Omega, \tag{2}$$

$$x(s,t) = 0, \ (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

для уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda \mathbb{I} + \Delta)x + \alpha \Delta x + \beta |x|^{p-2} x = u, \quad p \geq 2, \tag{4}$$

где функция $x = x(s,t)$ состояние системы; $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ – параметры системы, свободный член $u = u(s,t)$ отвечает внешнему воздействию.

Построим множество (называемое в дальнейшем фазовым многообразием)

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda \neq \lambda_k, \\ \{x \in \mathfrak{H} : \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} x_{s_i} \varphi_{k s_i} \, ds = \int\limits_{\Omega} (\beta |x|^{p-2} x + u) \varphi_k \, ds\}, \\ \text{если } \lambda = \lambda_k \end{cases}$$

и сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0,T), \tag{5}$$

где

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ для } \lambda \neq \lambda_k, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda = \lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle, \text{ для } \lambda = \lambda_k. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\operatorname{coim} L = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda \neq \lambda_k; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_k \rangle = 0\}, \text{ если } \lambda = \lambda_k. \end{cases}$$

Теорема 1. [1] *Если при* $\lambda \in \mathbb{R}$ *выполнено условие* (5) *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *причем* $\alpha\beta < 0$, *и* $n > 2$, $2 < p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$. *Тогда*
(i) множество $\mathfrak{M}$ *является простым банаховым* C^1*-многообразием, моделируемым подпространством* $\mathfrak{H}^1$;
(ii) существует $T(x_0)$ *и единственная квазистационарная полутраектория* $x \in C^1(0, T(x_0); \mathfrak{M})$ *уравнения* (4), *проходящая через точку* x_0.

Введем пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$ и выберем непустое, замкнутое, выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Пусть

$$\mathfrak{X} = \{x \in L_2(0, T; \mathfrak{H}) : \dot{x} \in L_2(0, T; \operatorname{coim} L)\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество пар $\{x, u\} \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющих задаче (1) – (4).

Теорема 2. [2] *Если при* $\lambda \in (-\infty, \lambda_1]$ *выполнено условие* (5), *параметры* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}_-$ *и* $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$. *Тогда для любого* $T > 0$ *существует единственная квазистационарная полутраектория* $x \in C^1((0, T); \mathfrak{M})$ *уравнения* (4), *проходящая через точку* x_0.

Теорема 3. [2] *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, *параметры* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, *причем* $\alpha\beta < 0$, *и* $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$ *и выполнено условие* (5). *Тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ *таких, что множество* $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ *существует решение задачи оптимального управления* (1) – (4).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740023.

Список литературы

[1] *Манакова, Н.А.* Неклассические уравнения математической физики. Фазовые пространства полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 31–51.

[2] *Perevozchikova, K.V.* Research of the Optimal Control Problem for One Mathematical Model of the Sobolev Type / K.V. Perevozchikova, N.A. Manakova // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2021. – V. 14, № 4. – P. 36–45.

[1]Южно-Уральский государственный университет, Россия.
Email: vasiuchkovakv@susu.ru
[2]Южно-Уральский государственный университет, Россия.
Email: manakovana@susu.ru

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

ПЕРЕСКОКОВ А.В.

Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon e_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = i x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - i x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, а электрическое поле вдоль оси x_1. Число $e_1 > 0$ — напряженность электрического поля, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию резонансных спектральных кластеров около собственных значений невозмущенного атома водорода [1].

Алгебраический метод построения асимптотики спектра и собственных функций атома водорода был предложен в работе [2]. Однако этот метод не применим для состояний системы, которые отвечают границам спектральных кластеров. В работе [3] был предложен метод построения асимптотики спектра около границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении для асимптотических собственных функций. С его помощью доказано [4], что вблизи верхних границ спектральных кластеров имеется серия собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m \sqrt{9n^2 e_1^2 + 1} - \varepsilon^2 n^4 e_1^2 (4n^2 + 9n|m| - 6m^2) - \\ -18\varepsilon^2 n^4 e_1^2 (n - |m|)(k + 1/2) + O(\varepsilon^2 n^4) + O(\varepsilon^3 n^{10}),\end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon \to +0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/5}$, $1 \ll |m| < n$. Здесь e_1 принимает произвольные положительные значения. Случай малых значений e_1 рассмотрен в [5].

Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана—Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Поскольку в гамильтониан (1) входит параметр e_1, то возникает однопараметрическое семейство уравнений Гойна, к которым сводится усредненная задача в неприводимом представлении алгебры Карасева—Новиковой $\mathcal{F}_{quant}$ с квадратичными коммутационными соотношениями [1, 2]. Асимптотика решений уравнений Гойна строится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

Список литературы

[1] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода // ТМФ. 2005. Т. 142. No. 3. с. 530–555.

[2] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ. 1996. Т. 108. No. 3. с. 339–387.

[3] *Перескоков А. В.* Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров // Изв. РАН, сер. мат. 2013. Т. 77. No. 1. с. 165–210.

[4] *Migaeva A. S., Pereskokov A. V.* Semiclassical asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the upper boundaries of spectral clusters // J. Math. Sci. (N.Y.) 2020. v. 251. no. 6. pp. 850–875.

[5] *Pereskokov A. V.* On the asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in orthogonal electric and magnetic fields near the upper boundaries of spectral clusters // Russ. J. Math. Phys. 2019. v. 26. no. 3. pp. 391–400.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия.
Email: pereskokov62@mail.ru

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

ПЕРОВ А.И.[1], КОСТРУБ И.Д.[2]

Основным источником по теории конечных разностей для нас является [1]. Пусть $\mathbb{B}$ комплексная банахова алгебра [2], [3], $\mathbf{G} \subset \mathbb{B}$ – открытое множество и $f(\mathbf{x}) : \mathbf{G} \to \mathbb{B}$ – некоторая функция (оператор, отображение). Пусть n – произвольное натуральное число и $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ – произвольная система узлов, лежащая в $\mathbf{G}$.

Считаем алгебру $\mathbb{B}$ коммутативной [4]. *Разделенной разностью порядка* $n-1$ *функции* $f(\mathbf{x})$, отвечающей системе узлов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$, называется выражение (слева – обозначение)

$$\Delta^{n-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{z}_j) \prod_{k \neq j} (\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1}. \qquad (1)$$

Предполагаем, что выполнено условие разделенности: существуют обратные $(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1}$ при $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq n$.

В общем случае полагаем

$$\Delta^{n-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{z}_j)\mathbf{c}_{jk}. \tag{2}$$

Предполагаем, что система узлов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ лежит *в общем положении*, если матрица Вандермонда $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$, где $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_{jk})$ имеет вид $\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{z}_k^{j-1}$ $(1 \leq j, k \leq n)$, имеет обратную $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{jk})$, где $(\mathbf{c}_{jk})$ из $\mathbb{B}$ $(1 \leq j, k \leq n)$. $\mathbf{CV} = \mathbf{E}$, $\mathbf{VC} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица в $\mathbb{B}^{n \times n}$ $(\mathbf{E} = \mathrm{diag}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, ..., \mathbf{1})$, $\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n))$. Известно, что: *Для обратимости матрицы Вандермонда $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ необходимо, чтобы было выполнено условие разделености $(\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k)^{-1}$ при $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq n$ и достаточно, чтобы было выполнено условие спектральной разделенности $S(\mathbf{z}_j) \cap S(\mathbf{z}_k) = 0$ при $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq n$.*

Пусть матрица Вандермонда $\mathbf{V}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ обратима и матрица $\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ записана в виде $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{jk})$, где $(\mathbf{c}_{jk}) \in \mathbb{B}$ при $1 \leq j, k \leq n$. Тогда все элементы последнего столбца обратной матрицы $\mathbf{C}$ обратимы $\mathbf{c}_{jk}$, $1 \leq j \leq n$ (см. формулу (2)*).*

Последнее относится к функциональному исчислению. Рассмотрим контурный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma} f(\lambda) \left(\mathbf{a}_0 \lambda^n + \mathbf{a}_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}\lambda + \mathbf{a}_n\right) d\lambda. \tag{3}$$

Здесь $f(\lambda) : G \to \mathbb{C}$ (кусочно) аналитическая функция, $G \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, в круглых скобках – резольвента n-го порядка $\mathbf{r}_n(\lambda) : R \to \mathbb{B}$, $\partial\sigma$ – криволинейный контур, лежащий в $G \cap R$ и охватывающий спектр S (S и R – спектр и резольвентное множество скалярного характеристического многочлена $\mathbf{a}_0\lambda^n + \ldots + \mathbf{a}_n : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$).

Обозначим $\mathbb{B}(G)$ открытое множество тех $\mathbf{x}$ из $\mathbb{B}$ спектр $S(\mathbf{x})$ которых лежит в G. Положим

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda - \mathbf{x})^{-1} d\lambda \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{B}(G)).$$

Здесь $\partial\sigma$ лежит в $G \cap R(\mathbf{x})$ и окружает спектр $S(\mathbf{x})$ элемента $\mathbf{x}$.

Рассмотрим уравнение $\mathbf{a}_0\lambda^n + \mathbf{a}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}\lambda + \mathbf{a}_n = 0$ корни которого $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ лежат в общем положении и $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{jk}) = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях имеют место следующие формулы*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma} f(\lambda) \left(\mathbf{a}_0 \lambda^n + \mathbf{a}_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}\lambda + \mathbf{a}_n\right) d\lambda =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{z}_j)\mathbf{c}_{jk} = \Delta^{n-1} f(\mathbf{x})(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n). \tag{4}$$

Исследования первого из авторов выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант 19–01–00732.

Список литературы

[1] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.

[2] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М. : ИЛ, 1968.

[3] *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975.

[4] *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. УМН. 1946. Т. 1, вып. 2(12). С. 48–146.

[5] *Перов А. И., Коструб И. Д.* Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах. Доклады РАН. 2020. Т. 491. № 4. С. 83-87.

[1]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: anperov@mail.ru

[2]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: ikostrub@yandex.ru

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

ПЕЧЕНЦОВ А.С.

В $L^2[0, +\infty)$ рассматрим оператор $\mathcal{H}$ порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + a\delta(x - b). \tag{1}$$

и краевым условием Дирихле $y(0) = 0$, где δ — дельта функция Дирака,$a > 0, b > 0$ и вещественная функция (потенциал) $q(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема при $x \geq 0$, причем $q'(x) > 0$, $q''(x) \geq 0$ при $x > 0$. При определении оператора Штурма - Лиувилля с потенциалами-распределениями будем следовать подходу, развитому А.М.Савчуком и А.А.Шкаликовым в работах [2,3]. Невозмущенный оператор $\mathcal{H}_0$, соответствующий значению $a = 0$, обладает дискретным спектром [1]

$$\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{\infty}, \quad \lambda_{n+1}^0 > \lambda_n^0,\ n = 0, 1, 2..., \quad \lambda_n^0 \to +\infty,\ n \to +\infty.$$

В силу возрастания функции $q(x)$ уравнение $g(x) = \lambda$ при $\lambda > q(0)$ имеет единственное решение $x(\lambda)$, называемое точкой поворота, и эта точка поворота простая, т.е. $g'(x(\lambda)) \neq 0$. Доказаны теоремы:

Теорема 1. *Собственные значения λ_n оператора $\mathcal{H}$ удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_0^0 < \lambda_0 < \lambda_1^0, \quad \lambda_n^0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}^0 \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

Теорема 2. *Если $q(x) = cx^k, k \geq 1, c > 0$, то собственные значения λ_n оператора $\mathcal{H}$ имеют асимптотику при $n \to +\infty$*

$$\lambda_n = \alpha n^{\frac{2k}{k+2}} \left(1 - \frac{k}{2(k+2)n} + \frac{2k}{\pi(k+2)} (\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \frac{a \cos^2 \beta(b)}{n^{\frac{2k+2}{k+2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2k+2}{k+2}}}) \right),$$

где

$$\alpha = \Big(\frac{\pi k c^{\frac{1}{k}} \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{k})} \Big)^{\frac{2k}{k+2}}, \beta(b) = \int_b^{(\frac{\lambda_n}{c})^{\frac{1}{k}}} (\lambda_n - ct^k)^{\frac{1}{2}} dt - \frac{\pi}{4},$$

Γ-*Гамма -функция Эйлера.*

Пример 1. ([5]). Если $q(x) = x$, то справедлива асимптотика

$$\lambda_n = \Big(\frac{3}{2} \pi n \Big)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{a \sin^2 \Big\{ b \Big(\frac{3}{2} \pi n \Big)^{\frac{1}{3}} \Big\}}{2 \big(\frac{3}{2} \pi n \big)^{\frac{4}{3}}} + O\Big(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} \Big) \right), n \to +\infty.$$

Замечание 1. В работе [5] решен вопрос о расположении первого с.з.λ_1 в зависимости от параметров a, b и для отрицательных a. В частности, найдены условия , при которых λ_1 является отрицательным и дана его оценка снизу.

Пример 2. ([6]). Если $q(x) = \frac{x^2-2}{4}$, то $\lambda_n^0 = 2n-1, n = 1, 2, ...$ и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = 2n - 1 + \sqrt{2} a \pi^{-\frac{3}{2}} \frac{\sin^2(b\sqrt{2n})}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{n} \Big), \quad n \to +\infty.$$

Список литературы

[1] *Титчмарш Э. Ч.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Москва, Изд-во физико-математической литературы, т. 1, 1960.

[2] *Савчук А.М.,Шкаликов А.А.* Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями. // Труды московского математического общества. 2003. Том 64. С. 159-212

[3] *Савчук А.М.,Шкаликов А.А.* Операторы Штурма Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат.заметки.1999.Т.66.С.897-912.

[4] *Albeverio S., Kostenko A., Malamud M.* Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set // J. Math. Phys., 51:10 (2010), 102102, 24 pp.

[5] *Печенцов А.С.,Попов А.Ю.* Распределение спектра одного сингулярного оператора Штурма-Лиувилля, возмущенного δ – функцией Дирака.// Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 2, с.168–179.

[6] *Печенцов А.С.* Распределение спектра оператора Вебера, возмущенного δ – функцией Дирака.// Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 8, с.1032–1038.

Московский государственный университет им М.В.Ломоносова, Россия.
Email: pechentsovas@rambler.ru

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ КАНА — ХИЛЛАРДА

ПЛЫШЕВСКАЯ С.П.

Рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда,

$$\begin{aligned} &u_t = (-\alpha u_{xx} - u + bu^2 + u^3)_{xx}, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(1,t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Такого вида краевые задачи изучались в [1].

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия $u_0(t,x) \equiv c$ в (1) произведем замену $u = c + \upsilon$ и перейдем к краевой задаче

$$\begin{aligned} &\upsilon_t = (-\alpha \upsilon_{xx} - \beta \upsilon + \gamma \upsilon^2 + \upsilon^3)_{xx}, \\ &\upsilon_x(0,t) = 0, \quad \upsilon_x(1,t) = 0, \quad \upsilon_{xxx}(0,t) = 0, \quad \upsilon_{xxx}(1,t) = 0, \\ &\beta = 1 - 2bc - 3c^2, \qquad \gamma = b + 3c, \qquad M(\upsilon) = \int_0^1 \upsilon(x)dx = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

При условии
$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2\alpha = 0, \tag{3}$$
для некоторого c_0 в задаче об устойчивости краевой задачи (2) возникает критический случай.

Рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (2) при условии $c = c_0 + \varepsilon c_1$, где c_0 является корнем уравнения (3), $c_1 \neq 0$ — как-то фиксировано, а ε — малый положительный параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Введем в рассмотрение стандартный для метода нормальных форм ряд

$$\upsilon(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi(\tau)\cos(\pi x) + \varepsilon \upsilon_2(\tau,x) + \varepsilon^{3/2}\upsilon_3(\tau,x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{4}$$

Подставим (4) в (2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение для $\upsilon_3(\tau,x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$\dot{\xi} = \delta\xi + \sigma\xi^3, \tag{5}$$

где $\delta = 2\pi^2(b+3c_0^2)c_1, \quad \sigma = -\dfrac{3}{4}\pi^2 - \gamma^2(6\alpha)^{-1}$.

Теорема 1. *При условиях $\delta \neq 0, \quad \sigma \neq 0$ и при всех достаточно малых ε поведение решений (2) из некоторой достаточно малой и независящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением (5).*

Список литературы

[1] *Кащенко С. А.* Бифуркации в уравнении Курамото —Сивашинского. Теоретическая и математическая физика. 2017. Том. 192, №. 1, стр. 23–40.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Россия.
Email: splyshevskaya@mail.ru

ОЦЕНКА СНИЗУ НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ МИНИМУМОВ МОДУЛЯ НА ОКРУЖНОСТЯХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

ПОПОВ А.Ю.

Даны числа $R > 0$, $q \in (0,\,1)$. Рассматриваются функции из пространств $H^1(R_1)$, $R_1 > R$. Обозначим

$$m(f,r) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \;\; \|f\|_{R_1} = \lim_{x\to R_1-} \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(xe^{i\varphi})| d\varphi.$$

Определим величину

$$\mathfrak{M}(f;[qR,R]) = \max\{m(f,r) \,\big|\, qR \le r \le R\}.$$

Ставится следующая задача. Сколь большим должно быть число $R_1 > R$, чтобы точная нижняя грань

$$\inf\{\mathfrak{M}(f;[qR,R])\,\|f\|_{R_1} \;\big|\; f \in H^1(R_1), f(0)=1\}$$

оказалась положительной? Другими словами, насколько R_1 должно быть больше R, чтобы гарантировать справедливость неравенства

$$\mathfrak{M}(f;[qR,R]) > \frac{c}{\|f\|_{R_1}} \quad \forall f \in H^1(R_1) \text{ при условии } f(0)=1, \tag{1}$$

в котором c – абсолютная постоянная (или функция параметра q)?

Теорема 1. *Пусть $q \in [1/3, 1)$, $a(q) = (1+3q)/(1-q)$, $R_1 = a(q)R$. Тогда выполняется соотношение* (1), *в котором $c = 3/64$. В частности, верны равенства $a(1/3) = 3$, $a(1/2) = 5$, $a(2/3) = 9$.*

Обсудим вопрос о точности сформулированного результата. Не завышено ли значение $R_1 = a(q)R$ в в теореме 1? Верна ли оценка (1), если взять, например, $R_1 = (a(q) - 1)R$? Автору это не известно, но взять $R_1 = b(q)R$, где $b(q) = a(q) - 1 - (1 - q)/4$, уже нельзя.

Теорема 2. *Для любых $R > 0$ и $q \in [1/3, 1)$ существует такая последовательность целых функций g_n, что выполняются соотношения*

$$g_n(0) = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} \bigl(\mathfrak{M}(f; [qR, R]) \max_{|z|\le b(q)R} |g_n(z)|\bigr) = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что $\|g\|_{R_1} \le \max\limits_{|z|\le R_1} |g(z)|$, поэтому равенство нулю предела в (2) сильнее опровержения неравенства (1) при $R_1 = b(q)R$.

Рассмотренная задача для пространств аналитических в круге функций, по мнению автора, является новой. Но в теории целых функций тематика, связанная с оценкой снизу минимума модуля целой функции на некоторой уходящей в бесконечность последовательности окружностей, развивается уже более ста лет. Обширная библиография имеется в [1]. В этой тематике было принято оценивать снизу минимум модуля функции на окружности (на которой это возможно) через некоторую степень максимума модуля функции на той же окружности.

Хэйман [2] привел пример целой функции F бесконечного порядка, для которой справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln m(F,\, r)}{\ln M(F,\, r)} = -\infty, \text{ где } M(F,\, r) = \max_{|z|\le r} |F(z)|.$$

В задаче оценки минимума модуля через отрицательную степень максимума модуля на большей окружности ситуация иная. На основании теоремы 1 доказывается

Теорема 3. *Для произвольной целой функции $f \not\equiv 0$ существует такая возрастающая последовательность положительных чисел r_n, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$, что выполняются неравенства*

$$r_{n+1} < 3r_n + 1, \ m(f, r_n) > \tfrac{c}{M(f, 9r_n)} \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

где c – положительная постоянная, определяемая значением первого ненулевого коэффициента тейлоровского разложения f в точке 0.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-01-00584.

Список литературы

[1] *Hayman W. K.* Subharmonic functions. Vol. 2, Academic Press, London, New York, 1989.

[2] *Hayman W. K.* "Minimum modulus of large integral functions" , Proc. London Math. Soc., 1952, 2, 469-512.

Московский государственный университет, Россия. Email: station@list.ru

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ПУЛЬКИНА Л.С.

В сообщении рассматривается начально-краевая задача для уравнения

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x,t) \tag{1}$$

в области $Q_T = (0,l)\times(0,T)$ и изучается вопрос о существовании решения, удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) возникает при исследовании продольных колебаний стержня, и из физических соображений $b \neq 0$ всюду в области. Поэтому (1) мы можем записать в виде уравнения с доминирующей смешанной производной

$$u_{xxtt} + (Au_x)_x + (Bu_t)_t + Cu = F(x,t), \tag{4}$$

где новые коэффициенты выражаются через старые с помощью элементарных соотношений, и для исследования разрешимости поставленной задачи мы приходим к двум задачам Гурса, записав (4) следующим образом

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(u_{xt} + \int\limits_0^t Au_x d\tau + \int\limits_0^x Bu_t d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^x Cud\xi dt\right) = F(x,t). \tag{5}$$

Введя новую неизвестную функцию, приходим к двум задачам: классической задаче Гурса (G1) и нелокальной задаче (G2) для нагруженного уравнения.

Задача G1.

$$v_{xt} = F(x,t),$$

$$v(0,t) = \nu'(t) + \int\limits_0^t A\nu(\tau)d\tau = q(t),\ v(x,0) = \psi'(x) + \int\limits_0^x B\psi(\xi)d\xi = h(x).$$

Задача G2.

$$u_{xt}+\int\limits_0^t Au_x d\tau+\int\limits_0^x Bu_t d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^x Cud\xi dt=v(x,t),$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(l,t)+\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx=0.$$

Решение задачи G1 можно выписать в явном виде, а исследование задачи G2 требует некоторых усилий в связи с тем, что одно из условий нелокальное, а уравнение нагруженное. Основное внимание в докладе и будет уделено задаче G2. Результаты исследований привели к утверждению

Теорема 1. *Если* $A,B,C,F\in C(\bar{Q_T}),\ K\in C^1[0,l],\ \nu\in C^1[0,T]$, $\varphi,\psi\in C^1[0,l]\cap C^2(0,l)$ *и выполняются условия согласования* $\nu(0)=\varphi'(0),\nu'(0)=\psi'(0),\ \varphi(0)+\int\limits_0^l K(x)\varphi(x)dx=0$, *то существует единственное решение задачи* (1) — (3)*, которое понимается как функция* $u\in C^2(Q_T)\cap C^1(\bar{Q_T}),\ u_{xxtt}\in C(Q_T)$.

Замечание 1. В исследовании поставленной задачи принимал активное участие А.В. Гилев.

Самарский университет, Россия. Email: louise@samdiff.ru

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭФФЕКТА ПЕРРОНА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

РАВЧЕЕВ А.В.

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Обозначим показатели Ляпунова системы (1) через $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$, а их спектр — через $\Lambda(A)=(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A))$. Т.к. мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}\equiv\mathbb{R}\sqcup\{-\infty,+\infty\}$, которая наделяется порядковой топологией.

Для данных метрического пространства M и функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ рассмотрим класс $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| e^{\theta(t)t} < \infty$;

2) для всяких $k = \overline{1,n}$, $\mu \in M$, выполняется неравенство

$$\lambda_k(A(\cdot) + Q(\cdot,\mu)) \geqslant \lambda_k(A).$$

Отметим, что для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица $Q \equiv 0$.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства M класса

$$\Pi\mathcal{Q}_n^\theta(M) = \bigl\{\bigl(\Lambda(A), \Lambda(A+Q)\bigr) \mid A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n,\ Q \in \mathcal{Q}_n^\theta[A](M)\bigr\}.$$

Указанную задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, § 1.4] на случай неограниченных коэффициентов.

Будем говорить [2, с. 224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\bigl([r,+\infty]\bigr)$ луча $[r,+\infty]$ является G_δ-множеством метрического пространства M. В частности, класс $({}^*, G_\delta)$ — подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

Решение поставленной задачи содержит следующая

Теорема. *Для каждых метрического пространства M, натурального числа $n \geqslant 2$ и непрерывной функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ пара $\bigl(l, f\bigr)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \bigl(\overline{\mathbb{R}}\bigr)^n$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to \bigl(\overline{\mathbb{R}}\bigr)^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}_n^\theta(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;
2) $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ *для любого* $\mu \in M$;
3) $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1,n}$;
4) *для любого* $i = \overline{1,n}$ *функция* $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ *принадлежит классу* $({}^*, G_\delta)$.

Замечание. Аналог этой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентами установлен в работе [3].

Приведенная теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущенной систем (при дополнительном условии, что все показатели возмущенной системы не меньше, чем у исходной) можно получить в классе возмущений, убывающих быстрее всякой экспоненты. Эта ситуация является специфичной для класса систем с неограниченными коэффициентами, т.к. показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.В. Быкову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

[2] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

[3] *Барабанов Е.А., Быков В.В.* Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности. Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Россия. Email: rav4eev@mail.ru

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАУТИАН Н.А.

Изучаются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения, являющиеся операторными моделями задач теории вязкоупругости. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Установлено экспонециальное убывание решений при известных предположениях для ядер интегральных операторов. На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость исходной начальной задачи для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с соответсвующими оценками решения (см. [1]–[3]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-01-00288.

Список литературы

[1] *Раутиан Н. А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса// Дифференциальные уравнения, 2021, Т.57, № 9, С. 1255–1272.

[2] *Раутиан Н. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями// Уфимский математический журнал, 2021 Т. 13, № 4, С. 65–81

[3] *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия.
Email: nadezhda.rautian@math.msu.ru

СВЯЗЬ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ МИНИМАКСНОГО КУСОЧНО-ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ С РАЗМЕРНОСТЬЮ СИНГУЛЯРНОГО МНОЖЕСТВА

РОДИН А.С.

В работе рассмотрена краевая задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$D_t\varphi(t,x)+H(t,D_x\varphi(t,x)),\quad \varphi(T,x)=\sigma(x),\quad t\in[0;T]\,,\quad x\in R^n. \tag{1}$$

$$D_x\varphi(t,x)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t,x),\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(t,x),\dots\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(t,x)\right).$$

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях

A1) функция $H(t,s)$ непрерывна по t при каждом фиксированном s и выполнено условие липшица $|H(t,s_1)-H(t,s_2)|\le L\,\|s_1-s_2\|\,,\ D^2_{ss}H(t,s)$ является непрерывной функцией по всем переменным;

A2) функция $\sigma(x)\in C^2$ и строго выпукла.

При выполнений условий A1), A2) следующее определение обобщенного минимаксного решения существует и единственно, и эквивалентно вязкостному решению.

Определение 1. [1] Функция $\varphi:[0;T]\times R^n\mapsto R$ называется минимаксным решением задачи (1), если для него выполняется
следующее условие: для любой точки $(\xi,\sigma(\xi))\in R^{n+1}$ и вектора $D\sigma(\xi)$ существует число $T>t_0$ и липшицевая функция
$(x(\cdot),z(\cdot)):[0;T]\to R^n\times R$ такие, что $z(t,x)=\varphi(t,x(t))$ для всех $t\in[t_0;T]$, и справедливо

$$\dot z(t,x(t))=\langle\dot x(t),D\sigma(\xi)\rangle-H(t,D\sigma(\xi)),$$

при почти всех $t\in[t_0;T]$.

Как правило минимаксное решение не является всюду непрерывно дифференцируемым. Для этого введем следующие определения.

Определение 2. Множеством сингулярности Q для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1) является множество точек $(t,x)\in[0;T]\times R^n$, в которых функция φ не дифференцируема.

Определение 3. Точкой бифуркации (t_1, x_1) называется точка, для которой выполнено следующее условие $(t_1, x_1) \in \overline{Q} \setminus Q$, где $\overline{Q}$ есть замыкание множества Q.

Если решение задачи (1) является кусочно-гладким, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия A1), A2), то для того, чтобы точка бифуркации* $(t_1, x_1) \in \overline{M}_i^{[k]}$*, где размерность многообразия* $M_i^{[k]}$ *равна* $n+1-k$*, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* $D^2_{ss}\Psi(t_1, s_1) = D^2_{ss}\sigma^*(s_1) - \int_{t_1}^{T} D^2_{ss}H(\tau, s_1)d\tau$ *был равен* $n-k$*,* $k \in \overline{1, \ldots, n}$*.*

Здесь $\sigma^*(s) = \sup\limits_{\xi} \langle s, \xi \rangle - \sigma(\xi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 20-01-00362.

Список литературы

[1] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: пер- спективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. М.: Ижевск, 2003. 336 с.

[2] *Rodin, Aleksei S.* On the structure of the singular set of a piecewise smooth minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation / Aleksei S. Rodin // Ural Mathematical Journal. 2016. Vol 2, No 1. P. 58-68.

[3] *Rodin, A.S.* Bifurcation points of the generalized solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation / Aleksei S. Rodin, Lyubov.G. Shagalova // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, Issue 32. P. 866-870.

ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия.
Email: alexey.rodin.ekb@gmail.com

О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИЛ

РОМАНОВ И.В.[1], ШАМАЕВ А.С.[2]

В работе рассматривается задача управляемости с помощью граничного и распределенного управления одномерных колебательных систем с интегральным последействием. С помощью т.н. «препятствий к управляемости» доказано отсутствие полной управляемости в задачах граничного управления и отсутствие полной управляемости для некоторого класса задач распределенного управления. Исследована проблема устойчивости свойства полной управляемости по отношению к вариациям ядра свертки, определяющего эффект последействия. Устанавливается связь со спектральными свойствами рассматриваемых краевых задач.

Работа проводилась при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-11-00151.

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия. Email: romm1@list.ru

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия. Email: sham@rambler.ru

СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ КАК РЕЗУЛЬТАТ НАЛИЧИЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ФУНКЦИОНАЛОВ

РЫКОВ Ю.Г.

Современная теория систем законов сохранения представляет из себя обширную область исследований, с текущим состоянием дел можно ознакомиться, например, по книге [1]. Однако, несмотря на большое количество результатов, целостной теории в случае систем так и не было построено. С этой точки зрения представляет интерес поиск альтернативных подходов к рассмотрению обобщенных решений систем законов сохранения. В докладе будет резюмирован один из таких подходов, см. работу [2] и содержащиеся в ней ссылки.

Пусть $(t,x) \in \prod_T \equiv [0,T] \times \mathbb{R}$, $\mathbf{U}(t,x) = (u_1,\ldots,u_n)$, и функции $\mathbf{F} = (f_1 \ldots, f_n)$ являются достаточно гладкими вектор функциями переменных $(u_1,\ldots,u_n)$. Рассмотрим задачу Коши для одномерной системы законов сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}\right), \quad \mathbf{U}(0,x) = \mathbf{U}_0(x)\,. \tag{1}$$

Решения задачи (1) понимаются в обобщенном смысле (кратко: о.р.).

Введем вместо функции $\mathbf{U}(t,x)$ функционал

$$\begin{aligned} &\mathbf{J} : \chi(\tau) \in C^1\left([0,T],\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}^n\,, \\ &\mathbf{J} \equiv \int\limits_0^T \mathbf{L}(\dot{\chi},\mathbf{U})\,d\tau; \mathbf{L}(\dot{\chi},\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}\left(\tau,\chi(\tau)\right)\dot{\chi}(\tau) - \mathbf{F}\circ\mathbf{U}\left(\tau,\chi(\tau)\right)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{U}(t,x)$ лежит в классе кусочно непрерывно-дифференцируемых функций, и пусть существует траектория $x = \chi^*(t) \in C^1\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ такая, что $\delta\mathbf{J} = 0$ на ней. Тогда в точках χ^*, где $\mathbf{U}(t,x)$ является гладкой, выполняются уравнения (1) в классическом смысле, а в точках пересечения χ^* с линиями разрыва функции $\mathbf{U}(t,x)$*

выполняются соотношения Ренкина-Гюгонио. Более того, $\delta^2\mathbf{J}$ *вдоль* χ^* *содержит только члены, зависящие от* $(\delta\chi)^2$.

В этом смысле система (1) может быть заменена функционалом вида (2), у которого каждая точка является критической.

Можно показать, что в условиях Теоремы 1 функция ($\mathbf{U} = \partial\mathbf{V}/\partial x$) $\mathbf{M}_V(t,x) \equiv \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{F}\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\right)$ непрерывна на разрывах и, более того, не зависит от x.

Теорема 2. *Рассмотрим функцию* $\mathbf{V}(t,x) \in W^{1,\infty}(\prod_T) \equiv B$ *и начальное условие* $\mathbf{V}_0(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $\mathbf{V}_0'(x) = \mathbf{U}_0(x)$. *Обозначим через* $\mathcal{V}$ *подмножество* B*, такое что* $\mathbf{V}(+0,x) = \mathbf{V}_0(x)$. *Также на пространстве* B *рассмотрим функционал*

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}) \equiv \underset{t}{ess\,sup} \sum_{i=1}^{n} \underset{x}{Var}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + f_i\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\right)\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{V} = (v_1, \ldots, v_n)$*, а* $\underset{x}{Var}$ *обозначает вариацию выражения по переменной* x. *Пусть функция* $\overset{*}{\mathbf{V}}$ *реализует минимум* $m = 0$ *функционала* $\mathcal{L}$ *на множестве* $\mathcal{V}$. *Тогда функция* $\mathbf{U} = \partial\mathbf{V}/\partial x$ *будет о.р. задачи* (1).

Например, для систем типа Кейфитс-Кранзера $m \neq 0$, и формулировка Теоремы 2 может служить в качестве альтернативного определения понятия о.р., которое не требует привлечения дельта-функций. Функционал (3) можно рассматривать и как функцию ошибки при обучении нейронной сети для системы законов сохранения.

Данный подход, вообще говоря, может быть перенесен и на многомерный случай. В случае двумерной системы уравнений, исходя из обобщения (2) на основе соответствующей дифференциальной формы, могут быть получены аналоги (3) по различным пространственным переменным. Вопрос достаточности набора подобных аналогов для того, чтобы $\mathbf{U}$ являлась о.р. задачи (1), остается открытым.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 19-71-30004.

Список литературы

[1] *Liu Tai-Ping.* Shock waves. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2021.

[2] *Рыков Ю. Г.* Вариационная постановка задачи поиска обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем законов сохранения. Математические заметки, 2021, т. 110, вып. 6, с.945-948.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Россия.
Email: yu-rykov@yandex.ru

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

САБАТУЛИНА Т.Л.

Изучается система линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) с ограниченным последействием:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^h dR(s)x(t-s) = \\ &= Bx(t) + \int_0^\tau dQ(s)x(t-s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{1}$$

где $h, \tau \in \mathbb{R}_+$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R\colon [0,h] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, матрица B неотрицательная, A и R диагональные, функция $Q\colon [0,\tau] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ не убывает, $R(0)$, $Q(0)$ — нулевые матрицы, интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса, компоненты вектор-функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ локально суммируемы.

Следуя [1, с. 9-10], назовем решением уравнения (1) локально абсолютно непрерывную вектор-функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента, не нарушая общности, x полагаем равной нулю.

Предлагается следующая схема исследования устойчивости системы (1). Построим «систему сравнения»

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^h dR(s)x(t-s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

существенной особенностью которой, помимо экспоненциальной устойчивости, является положительность ее фундаментальной матрицы. Это позволяет найти для фундаментальной матрицы системы (2) тонкие двусторонние оценки [2], используя которые удается исследовать устойчивость исходной системы (1).

Еще одна важная задача, которая решается в рамках данной работы — эффективная оценка скорости стремления решения к нулю. Опираясь на методы теории монотонных операторов, удалось получить точные оценки коэффициента и показателя в экспоненциальной оценке для фундаментальной матрицы вспомогательной системы ФДУ, из которых следуют аналогичные оценки для любого решения исходной системы.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задание FSNM-2020-0028).

Список литературы

[1] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Наука, М., 1991.

[2] *Sabatulina T.* On sufficient conditions of exponential stability for systems of linear autonomous differential equations with aftereffect // Functional Differential Equations. Volume 28, No. 1-2, 2021, pp. 73-83.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия. Email: tlsabatulina@list.ru

ПЕРВАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

САБИТОВ К.Б.

Для двумерного волнового уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) + bu = 0 \tag{1}$$

в параллелепипеде $Q = \{(x, y, t)\,|\,(x, y) \in D, \ \ 0 < t < T\}$, здесь $D = \{(x, y)|\, 0 < x < p, 0 < y < q\}$, a, p, q и T – заданные положительные действительные числа, и b – любое заданное действительное число, поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \tag{2}$$

$$Lu(x, y, t) \equiv 0, \quad (x, y, t) \in Q; \tag{3}$$

$$u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=p} = u(x, y, t)\big|_{y=0} = u(x, y, t)\big|_{y=q} = 0; \tag{4}$$

$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = \tau(x, y), \ \ u(x, y, t)\big|_{t=T} = \psi(x, y), \ \ (x, y) \in \overline{D}, \tag{5}$$

где $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования с граничными условиями (4).

Как известно, что задача Дирихле для уравнений гиперболического типа поставлена некорректно. Соболев С.Л. [1] показал, что исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости внутри тонкостенных баков ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. Достаточно полный обзор работ, посвященных изучению задачи Дирихле для гиперболических уравнений приведен в монографии Пташника Б.И. ([2], с. 89–95) и работе автора [3]. Если задача Дирихле для одномерного волнового уравнения в прямоугольной области изучена достаточно полно, то эта задача для многомерного волнового уравнения недостаточно исследована. Денчев Р. [4], [5] впервые исследовал задачу Дирихле для уравнения (1) при $b = 0$, $a = 1$ с ненулевой правой частью и однородными граничными условиями в параллелепипеде, где установлены критерий единственности и существование решения задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ при определенных условиях на правую часть, связанных сходимостью числовых рядов. При этом возникающие малые знаменатели не изучены. В работе Бурского В.П. [6] установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для волнового уравнения в шаре.

В данной работе в классе регулярных решений уравнения (1), т.е. удовлетворяющих условиям (2) и (3), установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5) и само решение построено в явном виде как сумма ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда впервые возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функций $\tau(x,y)$ и $\psi(x,y)$, а также получены оценки об устойчивости решения по отношению граничных условий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 17-41-020516.

Список литературы

[1] *Соболев С. Л.* Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе // ДАН СССР. 1956. Т. 109, №4. С. 707–709.

[2] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка. 1984. 264с.

[3] *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными // Матем. заметки. 2015. Т.97, №2. С. 262–276.

[4] *Денчев Р.* О задаче Дирихле для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, №3. С. 501–504.

[5] *Денчев Р.* Задача Дирихле для волнового уравнения в параллелепипеде. Дубна. Объединенный институт ядерных исследований. 1969. З5-4836. 13с.

[6] *Бурский В. П.* Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения // Дифференц.уравнения. 1988. Т.24, №6. С. 1038–1039.

Институт стратегических исследований Республики Башкортостан,
Самарский государственный технический университет, Россия.
Email: sabitov_fmf@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И СПЕКТРЫ C^*-АЛГЕБР ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ

САВИН А.Ю.

Исследованию нелокальных эллиптических краевых задач посвящено большое число публикаций (см., напр., работы [1, 2, 3] и цитированную в них литературу). Во многих случаях нелокальность реализуется в виде операторов сдвига, отвечающих некоторым диффеоморфизмам. При этом, в приложениях часто возникают задачи, отвечающие диффеоморфизмам, не сохраняющим область, в которой рассматривается нелокальная задача. Наша работа посвящена исследованию таких задач на многообразиях.

Рассматривается конечно-порожденная группа Γ диффеоморфизмов гладкого многообразия W без края. Предполагается дополнительно, что задано компактное подмногообразие $M \subset W$ коразмерности нуль с краем $X \subset W$.

Действие группы Γ на W индуцирует представление в пространствах функций операторами сдвига $(T_\gamma u)(x) = u(\gamma^{-1}x)$, $\gamma \in \Gamma$. Мы рассматриваем класс нелокальных краевых задач на M, включающий задачи вида:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{\gamma} D_\gamma T_\gamma \widetilde{u} = f & \text{на } M, \\ \sum\limits_{\gamma} B_\gamma T_\gamma \widetilde{u} = g & \text{на } X. \end{array} \right. \tag{1}$$

Здесь u — неизвестная функция на M; $\widetilde{u}$ — ее продолжение нулем на $W \setminus M$; f — заданная функция на M; g — известная функция на крае X; D_γ, B_γ — дифференциальные операторы на M, причем только конечное их число отлично от нуля.

Далее предполагаем, что выполнено следующее условие регулярности: для любых элементов $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ связные компоненты подмногообразий γX и $\gamma' X$ либо не пересекаются, либо совпадают. В этом случае объединение образов края под действием элементов группы Γ, обозначаемое X_∞, является не более чем счетным дизъюнктным объединением подмногообразий коразмерности один в W.

Основной результат работы — реализация задач (1) как ограниченных операторов в пространствах Соболева и установление условий эллиптичности, обеспечивающих фредгольмову разрешимость. Схема получения результатов: сначала задача (1) сводится к оператору нулевого порядка; затем полученный оператор вкладывается в C^*-алгебру, обозначаемую $\Psi(W, X_\infty)$, порожденную операторами сдвига T_γ и псевдодифференциальными операторами на W с условиями сопряжения в смысле [4] на подмногообразии X_∞; наконец, применяются методы теории C^*-алгебр, чтобы установить условия фредгольмовости. В качестве основного вспомогательного результата описан спектр и топология Джекобсона на нем для C^*-алгебры $\Psi(W, X_\infty)$.

Результаты получены в совместной работе с В.Е. Назайкинским и Э. Шроэ. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Немецкого научно-исследовательского сообщества в рамках научного проекта №21-51-12006.

Список литературы

[1] *Антоневич А. Б.* Краевые задачи с сильной нелокальностью для эллиптических уравнений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 53:1 (1989), 3–24.
[2] *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional-differential equations and applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
[3] *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические дифференциальные задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем, Дифференц. уравнения, 53:5 (2017), 672–683.
[4] *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М. Мир, 1986.

Российский университет дружбы народов, Россия.
Email: a.yu.savin@gmail.com

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

САВЧУК А.М.[1], САДОВНИЧАЯ И.В.[2]

Рассматривается система вида

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

в пространстве

$$L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}.$$

Функции p_j, $j = 1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{P,U}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in AC[0,\pi] : \ell(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}, U(\mathbf{y}) = 0\},$$

где

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix},$$

причем строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C,\, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбца матрицы $\mathcal{U}$. Краевое условие, определенное формой U, называется *регулярным* (по Биркгофу), если

$$J_{14} \cdot J_{23} \neq 0.$$

Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием U (т.е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U})$), будем называть *регулярным*.

Хорошо известно (см. [1]), что такой оператор имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, расположенный в горизонтальной полосе. Обозначим через $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ систему собственных и присоединенных функций, а через $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональную систему. Спектральным разложением функции $\mathbf{f}$ по системе $\{\mathbf{y}_n\}$ будем называть предел сумм

$$S_m(\mathbf{f}; P) = \sum_{|n|\le m} (\mathbf{f}, \mathbf{w}_n)\mathbf{y}_n.$$

Пространство Бесова $B^{\theta}_{1,\,\infty}$, $\theta \in (0,1)$, определим как пространство $L_1[0,\pi]$ функций, для которых

$$\int_0^\pi |f(x+h) - f(x)|\, dx \le Ch^{\theta}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{f} \in L_\infty[0,\pi]$, $P_1, P_2 \in B^{\theta}_{1,\infty}[0,\pi]$ *для некоторого* $\theta \in (0,1)$. *Тогда*

$$\|S_m(\mathbf{f}; P_1) - S_m(\mathbf{f}; P_2)\|_{L_\infty} \le C\frac{\|\mathbf{f}\|_{L_\infty}}{m^{\theta}/2}, \tag{1}$$

где $C = C(P_1, P_2, U)$.

Список литературы

[1] Савчук А.М., Садовничая И.В. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями, Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Т. 66, No 3. С. 373-530.

[1]МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
Email: artem_savchuk@mail.ru

[2]МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия. Email: ivsad@yandex.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ГЛАВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

САДЫБЕКОВ М.А.

В докладе рассматриваются спектральные свойства оператора, заданного дифференциальным выражением с кусочно-постоянным главным коэффициентом

$$Ly \equiv \left\{ \begin{array}{l} -k_1^2 y''(x), \text{ при } 0 < x < x_0, \\ \\ -k_2^2 y''(x), \text{ при } x_0 < x < l, \end{array} \right\} = \lambda y\left(x\right), \tag{1}$$

с естественными условиями сопряжения

$$y(x_0 - 0) = y(x_0 + 0), \quad k_1 y'(x_0 - 0) = k_2 y'(x_0 + 0). \tag{2}$$

Область определения оператора задается двухточечными краевыми условиями общего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1\left(y\right) \equiv a_{11} y'\left(0\right) + a_{12} y'\left(l\right) + a_{13} y\left(0\right) + a_{14} y\left(l\right) = 0, \\ U_2\left(y\right) \equiv a_{21} y'\left(0\right) + a_{22} y'\left(l\right) + a_{23} y\left(0\right) + a_{24} y\left(l\right) = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

Здесь x_0 – строго внутреняя точка интервала $(0, l)$; коэффициенты k_1 и k_2 уравнения (1) – действительные числа; коэффициенты $\{a_{ij}\}$ краевых условий (3) – комплексные числа.

Задачи такого типа возникают, например, при решении методом разделения переменных двухфазных задач теплопроводности (с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности). Как было продемонстрировано в [1], условия согласования (2) естественным образом возникают при моделировании такого процесса теплопроводности.

В классическом непрерывном случае $k_1 = k_2$ полные спектральные характеристики задачи (1)-(3) были приведены в [2]. Нашей целью является построение спектральной теории задачи (1)-(3) в разрывном случае $k_1 \neq k_2$.

В докладе будут даны определения невырожденных краевых условий, регулярных краевых условий, усиленно регулярных краевых условий. В терминах миноров матрицы коэффициентов краевых условий (3) дано описание всех классов краевых условий и исследованы спектральные свойства задач: наличие собственных значений, явные или асимптотические формулы собственных значений, вопросы кратности собственных значений, описание корневых подпространств, свойства подноты и безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP08855352.

Список литературы

[1] Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1958. – Т. 121, №2. – С. 225–228.

[2] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$ // J.Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. 146, №1. – P. 148–191.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан. Email: sadybekov@math.kz

СЛУЧАЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ПОТОКИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

САКБАЕВ В.Ж.

Исследуются случайные гамильтоновы потоки в наделенном симплектической структурой вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве.

Определены конечно-аддитивные меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно фазовых потоков некоторого класса гамильтоновых систем. Введенные инвариантные меры применяются к анализу сходимости композиций независимых случайных гамильтоновых потоков. Получены условия, достаточные для сходимости композиций по вероятности к усредненному гамильтонову потоку.

Установлены условия сходимости по распределению композиций случайных гамильтоновых потоков к марковскому случайному процессу, математические ожидания функционалов от которого образуют полугруппу сжатий в пространстве квадратично интегрируемых по инвариантной мере функций. Исследована непрерывность полученной полугруппы и самосопряженность ее генератора (см. [1]).

Исследованы линейные гамильтоновы системы, допускающие особенности типа неограниченного возрастания за конечное время нормы значения решения. Предложен метод продолжения решения уравнений Гамильтона, допускающие особенности, посредством фазового потока в расширенном фазовом пространстве.

Список литературы

[1] *Бусовиков В. М., Сакбаев В. Ж.* Пространства Соболева функций на гильбертовом пространстве с трансляционно инвариантной мерой и аппроксимации полугрупп// Изв. РАН. Сер. матем., **84**:4 (2020) 79-109.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия.
Email: fumi2003@mail.ru

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МГД-ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

САМОХИН В.Н.

Система уравнений стационарного пограничного слоя электропроводной нелинейно вязкой среды О. А. Ладыженской имеет вид

$$\nu((1+k(u'_y)^2)u'_y)'_y - uu'_x - vu'_y + B^2(U-u) = -UU'_x, u'_x + v'_y = 0 \qquad (1)$$

и рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = u_0(y), u(x,0) = 0, v(x,0) = v_0(x), u(x,y) \to U(x), y \to +\infty, \qquad (2)$$

где $U(x)$, $p(x)$, $B(x)$, $E(x)$ связаны уравнением

$$UU'_x = -p'_x - BE - B^2U.$$

Для простоты плотность ρ и проводимость σ считаются равными единице, $k > 0$ - малая положительная постоянная.

Данная реологическая модель сплошной среды была предложена в [1]. В отсутствии магнитного поля, т.е. при $B(x) \equiv 0$, система уравнений вида (1) и ее автомодельные решения рассматривались в [2] и [3].

Будем искать такие решения системы (1), компонента $u(x,y)$ которых допускает представление

$$u(x,y) = U(x)f'_\eta(\eta, \lambda(x)),$$

где $\eta = y/\delta(x)$, функции $\lambda(x)$ и $\delta(x)$ определяются исходными данными задачи и при всех значениях λ для $f(\eta,\lambda)$ выполняются граничные условия

$$f'(0,\lambda) = 0, f'(\eta,\lambda) \to 1 \,\text{при}\, \eta \to +\infty.$$

Полагая

$$\delta(x)(\delta(x)U(x))' = 1, \nu\lambda(x) = \delta^2(x)U'(x), f_0 = f(0,\lambda) = -v_0(x)\delta(x)/\nu,$$

приходим к выводу, что функция $f(\eta, \lambda(x))$ при любом x должна быть решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1 + 3k(Uf''/\delta)^2)f''' + ff'' + \lambda(1-(f')^2) + \nu^{-1}B^2\delta^2(1-f') = 0$$

с граничными условиями

$$f(0) = f_0,\ f'(0) = 0,\ f'(\eta) \to 1 \,\text{при}\, \eta \to +\infty.$$

Это уравнение является обобщением известного уравнения Фолкнера-Скэн. Автомодельные решения системы уравнений (1) существуют, к примеру, при $U(x) \equiv \text{const}$, при $U(x) = Ax$ и применяются для изучения качественного поведения решений системы пограничного слоя в общем случае, см. [3].

Список литературы

[1] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Физматлит. 1970.

[2] *Олейник О. А., Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит. 1997.

[3] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Асимптотика решений уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды при внешнем течении, близком к симметричному//Проблемы математического анализа. Т. 59. 2011. С. 123-128.

Московский государственный политехнический университет, Россия.
Email: avt428212@yandex.ru

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ДИЭЛЕКТРИКИ

СЕРГЕЕВ А.Г.

Теория топологических диэлектриков — один из интереснейших и активно развивающихся разделов физики твердого тела. Диэлектрики этого типа характеризуются наличием энергетической щели, устойчивой к малым деформациям, что позволяет использовать топологические методы для их изучения. Ключевую роль при этом играет анализ групп симметрий этих объектов, на котором основана их классификация, предложенная Китаевым.

Главное внимание мы уделяем топологическим диэлектрикам, инвариантным относительно обращения времени. Для них имеет место эффект, называемый вырождением Крамерса, иначе говоря, двукратное вырождение собственных функций системы. Благодаря этому, для двумерных и трехмерных диэлектриков удается построить топологические инварианты, определенные по модулю 2.

Математический институт имени В.А.Стеклова РАН, Москва.
Email: sergeev@mi-ras.ru

МАССИВНЫЕ И ПОЧТИ МАССИВНЫЕ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ

СЕРГЕЕВ И.Н.

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

где $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$. Через S_* и S_δ обозначим множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| < \delta$.

Определение 1. (см. [1]) Будем говорить, что система (1) обладает *перроновской* или, соответственно, *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

(предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}^+$);

2) *полной* (или *глобальной*) *неустойчивостью*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* (или *глобальной*) *устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ (или $x \in S_*$) удовлетворяет требованию (2).

Для определения тех же *ляпуновских* свойств системы (1) нужно:

4) в пп. 1, 2 или в п. 3 второе требование (2) заменить требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

или, соответственно, добавить к нему ляпуновскую устойчивость.

Определение 2. Все свойства системы (1) из определения 1 — *массивны*: при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$ (или $S = S_* \setminus S_\delta$ [2]), накладывается условие (2), (3) или его отрицание. Им соответствуют *почти массивные* аналоги: *почти устойчивость*, *почти полная* (*почти глобальная*) *неустойчивость* и *почти асимптотическая* (*почти глобальная*) *устойчивость* — в их описании то же требование накладывается лишь на почти все решения, т.е. за исключением тех, что в начинаются в некотором *множестве вырождения* нулевой меры Лебега и первой категории Бэра.

Теорема 1. *Если система* (1) *ляпуновски почти устойчива, то и ляпуновски устойчива.*

Теорема 2. *Если система* (1) *ляпуновски почти асимптотически или почти глобально устойчива, то и ляпуновски устойчива.*

Теорема 3. *Если для каких-либо двух массивных свойств имеет место импликация, то она имеет место и для их почти массивных аналогов, а если какие-либо два массивных свойства несовместны, то несовместны и их почти массивные аналоги.*

Теорема 4. *При* $n = 2$ *существует автономная линейная диагональная система* (1), *не обладающая ни ляпуновской, ни перроновской, ни верхнепредельной полной неусточивостью, но ляпуновски, перроновски и верхнепредельно почти глобально неустойчивая.*

Теорема 5. *При* $n = 2$ *существует автономная система* (1), *не обладающая ни перроновской, ни верхнепредельной устойчивостью, но перроновски и верхнепредельно почти глобально устойчивая.*

Теорема 6. *При* $n = 2$ *существует автономная система* (1), *не обладающая ляпуновской асимптотической устойчивостью, но ляпуновски почти глобально устойчивая.*

Список литературы

[1] *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

[2] *Бондарев А.А.* Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 6. С. 858–859.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия.
Email: igniserg@gmail.com

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

СОЛОНУХА О.В.

Пусть $0 < T < \infty$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞, $\Omega_T := Q \times (0, T)$. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u(x,t) - \sum_{1 \le i \le n} \partial_i A_i(x,t,Ru,\nabla Ru) + A_0(x,t,Ru,\nabla Ru) = f(x,t),$$

где $x \in Q, t \in (0,T)$, с краевым и начальным условиями

$$u(x,t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q, t \in (0,T)), \qquad u(x,0) = \varphi(x) \qquad (x \in Q).$$

Здесь $2 \le p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, $\varphi \in L_2(Q)$, разностный оператор R задан формулой

$$Ru(x,t) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h,t), \qquad u(x,t) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \setminus Q,$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с соизмеримыми координатами. Функции вещественнозначны. Действие разностного оператора определяется матрицами R_s порядка $N(s)$, однозначно вычисляемыми исходя из вида R и Q, см. подробнее [1, 2]. Определим оператор $A : L_p(0,T;W_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ по формуле

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{0\le i\le n} \int_{\Omega_T} A_i(x,t,u,\nabla u)\,\partial_i v(t,x)\,dx\,dt$$

для любого $v \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) = \{u \in L_p(0,T;W_p^1(Q)) : u(\cdot,t)|_{x\in\partial Q} = 0 \text{ для п.в.} \, t \in (0,T)\}$, здесь и ниже $\partial_0 u := u$. Обозначим

$$W := \{u \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) : \partial_t u \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))\}.$$

Неограниченный оператор ∂_t имеет область определения $\mathcal{D}(\partial_t) = W$.

Теорема 1. *Пусть R_s — невырождены, пусть также A_i — функции типа Каратеодори, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) условие интегрируемости: $\exists c_1 > 0$ и $g_0 \in L_q(\Omega_T)$ такие, что

$$|A_i(x,t,\xi)| \le g_0(x,t) + c_1 \sum_{0\le i\le n} |\xi_i|^{p-1} \qquad (i = 0,1,\ldots,n);$$

2) условие эллиптичности: для всех s и любых $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$

$$\sum_{1\le m\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} \left(A_i(x,t,\zeta_{m\cdot}) - A_i(x,t,\eta_{m\cdot})\right) \left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_m > 0$$

при $\zeta \ne \eta$, $\zeta_{m0} = \eta_{m0}$, $\zeta_{m\cdot} = (\zeta_{m0}, \zeta_{m1}, \ldots, \zeta_{mn})$, $\zeta_{\cdot i} = (\zeta_{1i}, \ldots, \zeta_{N(s),i})^T$;

3) условие коэрцитивности: $\forall s\, \exists p' < p$, $c_2 > 0$ и $c_3, c_4 \ge 0$ такие, что

$$\sum_{1\le m\le N(s)} \sum_{0\le i\le n} A_i(x,t,\zeta_{m\cdot}) \left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_m \ge c_2 \sum_{1\le m\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} |\zeta_{mi}|^p - c_3 \sum_{1\le m\le N(s)} |\zeta_{m0}|^{p'} - c_4.$$

Тогда операторное уравнение

$$\partial_t u + ARu = f, \qquad u|_{t=0} = \varphi$$

имеет решение $u \in W$*, причем* $\exists c_5, c_6, c_7, c_8 > 0$ *такие, что*

$$\|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \le c_5 \|f\|^q_{L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))} + c_6 \|\varphi\|^2_{L_2(Q)},$$
$$\|u(T)\|^2_{L_2(Q)} \le c_7 \|f\|^q_{L_q(0,T;W^{-1}_q(Q))} + c_8 \|\varphi\|^2_{L_2(Q)}.$$

Заметим, что условия 1)–3) гарантируют деминепрерывость, псевдомонотонность и коэрцитивность оператора AR.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Список литературы

[1] *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. V. 91.

[2] O. V. Solonukha, "The First Boundary Value Problem for Quasilinear Parabolic Differential-Difference Equations," Lobachevskii Journal of Mathematics **42**(5), 1067–1077 (2021).

ФИЦ "ИУ"РАН, РУДН, Москва, Россия. Email: solonukha@yandex.ru

ЛИНЕЙНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ДАННЫМИ

СТАРОВОЙТОВ В.Н.

Пусть A и B — самосопряженные положительные (аккретивные) операторы в комплексном гильбертовом пространстве H. Оператор A может быть неограниченным, и его область определения $\mathcal{D}(A)$, конечно же, плотна в H, что необходимо для его самосопряженности. Оператор B является ограниченным и $\mathcal{D}(B) = H$.

Пусть t — вещественная переменная, которую мы будем называть временем и которая изменяется на отрезке $[0,T]$, $T < \infty$. Рассмотрена задача об определении функции $u : [0,T] \to H$, удовлетворяющей в H следующим уравнениям:

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad u(0) + \int_0^T \gamma(t)\, Bu(t)\, ds = g, \tag{1}$$

где функции $f : [0,T] \to H$ и $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}$, а также $g \in H$ предполагаются заданными.

Оператор A порождает в H сильно непрерывную полугруппу операторов e^{-At}. Если мы введем обозначение $\eta = u(0)$, то

$$u(t) = e^{-At}\eta + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Учитывая это представление, задачу (1) можно переписать в виде следующего уравнения:

$$\eta + S\eta = F, \tag{3}$$

где $S\eta = \int_0^T \gamma(t)\, B\, e^{-At}\eta\, dt$ и $F = g - \int_0^T \gamma(t)\, B \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds\, dt$. Если $\gamma \in L^1(0,T)$, то S является ограниченным оператором в H. Если дополнительно $f \in L^1(0,T;H)$, то $F \in H$. Таким образом, при выполнении этих условий мы можем рассматривать (3) как уравнение в пространстве H, а функция $u : [0,T] \to H$, определенная равенством (2), будет непрерывной. Если мы потребуем от функций γ и f большей гладкости, то получим дифференцируемость функции u и эквивалентность задач (1) и (3). В связи с этим назовем *обобщенным решением задачи* (1) непрерывную функцию $u : [0,T] \to H$, для которой справедливо представление (2), где $\eta \in H$ является решением уравнения (3).

Уравнение (3) однозначно разрешимо для произвольного $F \in H$ тогда и только тогда, когда -1 является регулярным значением оператора S. Это заведомо будет так, если $\|S\| < 1$. Последнее условие предполагает наличие некоторого ограничения на величину T при заданных γ и B, что приводит только к локальной однозначной разрешимости задачи. Заметим, что условие малости встречается практически во всех работах по данной тематике, кроме работ И. В. Тихонова (1998, 2003).

В данной работе исследован вопрос однозначной разрешимости задачи без наложения на T, B и γ условия малости. Исчерпывающий ответ на поставленный вопрос в случае, когда B является тождественным оператором, получен в работах И. В. Тихонова (1998, 2003): нетривиальных решений однородного уравнения (3) с $B = I$ не существует, если ни одно из решений λ характеристического уравнения

$$1 + \int_0^T \gamma(t)\, e^{-\lambda t}\, dt = 0$$

не принадлежит точечному спектру оператора A. Это условие, в частности, выполнено, если A — симметрический оператор, а функция γ неотрицательна. В этом случае собственные числа оператора A являются вещественными, а характеристическое уравнение не имеет вещественных решений.

Основным результатом данной работы является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть A и B — самосопряженные положительные операторы в гильбертовом пространстве H, причем оператор B является ограниченным. Если γ — неотрицательная функция из $L^1(0,T)$, то для произвольных $f \in L^1(0,T;H)$ и $g \in H$ задача (1) имеет единственное обобщенное решение.*

Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск, Россия.
Email: starovoitov@hydro.nsc.ru

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

СУББОТИНА Н.Н.[1], КРУПЕННИКОВ Е.А.[2]

Рассматривается обратная задача теории управления – задача динамической реконструкции управлений для систем вида

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)),\\ x \in R^n, \quad u \in \mathbf{U} \subset R^m, \quad m \geq n, \quad t \in [0,T],\end{gathered} \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ — вектор фазовых переменных, $u(\cdot)$ — вектор управлений, а $\mathbf{U}$ — компакт. Допустимые управления — измеримые функции.

Требуется восстановить неизвестное управление, порождающее наблюдаемую траекторию $x^*(\cdot) : [0,T] \to R^n$ системы (1), называемую базовой. Реконструкция производится на основании неточных замеров базовой траектории. Эти замеры $\{y_k^\delta,\ k = 0,\dots,N\}$ имеют погрешность $\delta > 0$ и поступают с шагом $h^\delta > 0$.

Задача реконструкции управлений некорректна, так как одна и та же базовая траектория может порождаться разными управлениями. Среди всех таких управлений единственным образом выделяется нормальное управление [1], которое и является искомым в следующей корректной **задаче динамической реконструкции управлений**:

Для параметров $\delta \in (\delta_0]$ и $h^\delta \in (0, h_0]$, и соответсвующих им замеров $\{y_k^\delta\}$ построить такие измеримые, равномерно по параметрам ограниченные управления $u^\delta(\cdot) : [0,T] \to R^m$, что при стремлении к нулю параметров δ и h^δ эти управления сходятся слабо со звездой к нормальному управлению $u^*(\cdot)$ в пространстве L^1, а траектории системы (1), порожденные этими управлениями, сходятся равномерно к базовой траектоии $x^*(\cdot)$.

Реконструкция должна производиться в реальном времени по мере поступления новых точек замеров.

В работах [1, 2] предложен и обоснован подход к решению задачи динамической реконструкции управлений, опирающийся на необходимые условия оптимальности во вспомогательных вариационных задачах с функционалом вида

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left[-\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u(t)\|^2}{2} \right] dt \to \min, \qquad (2)$$

где α — малый регуляризирующий (по Тихонову [3]) параметр. Функция $y^\delta(t)$ является гладкой интерполяцией дискретных замеров $\{y_k^\delta\}$.

Особенностью этого подхода является использование невыпуклого функционала (2). Отличием от традиционных подходов, с использованием выпуклых функционалов, является то, что для построения аппроксимаций решения используются стационарные точки (2), удовлетворяющие лишь необходимым условиям оптимальности.

Показано, что аппроксимации решения, полученные с использованием этих точек, устойчивы по отношению к погрешностям замеров. Для сравнения эффективности разных подходов приведены иллюстративные примеры решения задачи реконструкции управлений с помощью вариационных подходов, использующих функционалы с выпуклым и выпукло-вогнутым лагранжианом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

Список литературы

[1] *Субботина Н. Н., Крупенников Е. А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 27(2). 2021. С. 208-220.

[2] *Субботина Н. Н., Крупенников Е. А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции. // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 315. 2021. С. 247–260.

[3] *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач. // Докл. АН СССР, 39(5). 1943. С. 195–198.

[1]Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия. Email: subb@uran.ru

[2]Институт Математики и Механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия.
Email: krupennikov@imm.uran.ru

МОДЕЛИ ОСКОЛКОВА В МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ

СУКАЧЕВА Т.Г.

Система уравнений Осколкова

$$\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega\times v +\\
&\tfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b + f^1,\\
&\nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \quad b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b) + f^2.\\
&\frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l\in\mathbb{R}_-, \quad \beta_l\in\mathbb{R}_+, \quad l=\overline{1,\ K},
\end{aligned} \tag{1}$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка K [1] в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v = (v_1(x,t),\ldots,v_n(x,t))$ и $b = (b_1(x,t),\ldots,b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p = p(x,t)$ – давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, параметры β_l, $l=\overline{1,\ K}$ – определяют время ретардации (запаздывания) давления. Свободные члены $f^1 = (f^1_1,\ldots,f^1_n)$, $f^1_i = f^1_i(x,t), f^2 = f^2(x,t)$ отвечают внешнему воздействию на жидкость.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для системы (1)

$$\begin{aligned}
&v(x,0)=v_0(x), \quad b(x,0)=b_0(x), \quad w_l(x,0)=w_{l0}(x) \quad x\in D,\\
&v(x,t)=0, \quad b(x,t)=0, \quad w_l(x,t)=0 \quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R}_+.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $l=\overline{1,\ K}$; $D\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3,$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Заметим, что задачи такого типа возникают, например, в геофизике [2]. Ранее вырожденные автономные модели магнитогидродинамики изучались в работах [3] – [5]. В неавтономном случае исследование было начато в [6] и продолжено в [7].

Задача (1), (2) исследуется в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа. Основным ннструментом исследования служит понятие относительно $p-$секториального оператора и порожденной им разрешающей вырожденной полугруппы операторов [8], [9]. Доказана теорема существования единственного решения указанной задачи, являющегося квазистационарной полутраекторией и получено описание ее расширенного фазового пространства. Полученная теорема обобщает соответствующие результаты [6].

Список литературы

[1] *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и Олдройта / А. П. Осколков // Тр. Мат. института им. В. А. Стеклова. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.

[2] *Hide R.* On planetary atmospheres and interiors/R.Hide// Mathematical Problems in the Geophisical Sciences, 1, W.H.Raid, ed. Am. Math. Soc., Providence R.I., 1971.

[3] *Sukacheva T. G.* Phase Space of a Model of Magnetohydrodynamics. /T. G. Sukacheva. A. O. Kondyukov// Differential Equations. – 2015. – T. 51, № 4. – C. 502–509. DOI: 10.1134/S0012266115040072

[4] *Kadchenko S. I.* Numerical study of a flow of viscoelastic fluid of Kelvin-Voigt having zero order in a magnetic field/ S. I. Kadchenko A. O Kondyukov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 2. – P. 40-47.

[5] *Сукачева Т. Г.* Фазовое пространство модели магнитогидродинамики ненулевого порядка /Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков// Дифф. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 8. – С. 1083-1090.

[6] *Kondyukov A. O.* Computational experiment for a class of mathematical models of magnetohydrodynamics/ A. O. Kondyukov, T. G. Sukacheva, S. I. Kadchenko, L. S. Ryazanova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 149–155.

[7] *Kondyukov A. O.* A Non-stationary Model of the Incompressible Viscoelastic Kelvin-Voigt Fluid of Non-zero Order in the Magnetic Field of the Earth/ A.O.Kondyukov , T.G.Sukacheva//Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2019. – Т. 12, № 3. – С. 42–51.

[8] *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов/Г.А. Свиридюк/ УМН. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.

[9] *Sviridyuk G. A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators/G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov/ – Utrecht. Boston. Köln. Tokyo. : VSP, 2003.

Новгородский госудасртвенный университет имени Ярослава Мудрого, Россия. Email: tamara.sukacheva@novsu.ru

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СВЯЗАННОГО С АСИМПТОТИКАМИ СИММЕТРИЙНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

СУЛЕЙМАНОВ Б.И.[1], ШАВЛУКОВ А.М.[2]

Доклад основан на результатах статьи [1].

Выписано общее решение уравнения Абеля второго рода

$$(486R^4-171R^2+5+9Rz)z'_R = 972R^4-162R^2+(1458R^3-225R)z+27z^2, \quad (1)$$

возникающего при построении асимптотик при больших значениях времени совместных решений уравнений Кортевега – де Вриза и стационарной части его высшей неавтономной симметрии. (Эта симметрия определяется линейной комбинацией первой высшей коммутирующей симметрии уравнения Кортевега – де Вриза и его классической симметрии Галилея.) Данное общее решение (1) зависит от произвольного параметра. По теореме о неявной функции оно локально определяется из уравнения, явно выписанного в терминах гипергеометрических функций. Частный случай этого общего решения задает автомодельные решения уравнений Уизема, найденные ранее Г. В. Потеминым в 1988 г.. (В известных работах А. В. Гуревича и Л. П. Питаевского начала 70-х годов было установлено, что эти решения уравнений Уизема в главном порядке описывают возникновение незатухающих осциллирующих волн в широком ряде задач с малой дисперсией.)

Этот результат подтверждает эмпирическое правило, согласно которому при описании асимптотик решений инегрируемых уравнений могут возникать лишь опять-таки интегрируемые уравнения. Выдвигается общая гипотеза о том, что интегрируемые обыкновенные дифференциальные уравнения, подобные рассматриваемому в статье, должны возникать и при описании асимптотик при больших временах других симметрийных решений эволюционных уравнений, допускающих применение метода обратной задачи рассеяния.

Список литературы

[1] *Сулейманов Б. И., Шавлуков А.М.* Интегрируемое уравнение Абеля и асимптотики симметрийных решений уравнения Кортевега-де Вриза. Уфимский математический журнал. Том 13. № 2 (2021). С. 104-111

[1]Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Россия.
Email: bisul@mail.ru

[2]Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Россия.
Email: aza3727@yandex.ru

ЗАТУХАЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ БИФУРКАЦИИ ЦЕНТР-СЕДЛО

СУЛТАНОВ О.А.

Рассматривается неавтономная система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + F(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = -(x^2 - \lambda)w(x) + G(x,y,t),$$

где $F(x,y,t)$, $G(x,y,t)$, $w(x)$ — гладкие функции, определенные для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Предполагается, что $F(x,y,t) \to 0$ и $G(x,y,t) \to 0$ при $t \to \infty$ и любых фиксированных значениях (x,y), а $w(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. В этом случае в предельной системе имеет место бифуркация центр-седло: при вариации параметра λ неподвижные точки типа центр и седло сливаются и исчезают. В работе исследуется влияние затухающих возмущений $F(x,y,t)$ и $G(x,y,t)$ на глобальное поведение решений. В частности, описываются условия, при которых гарантируется сохранение бифуркации в возмущенной неавтономной системе. Когда бифуркация нарушается, в критическом случае появляется пара решений, стремящихся к вырожденному равновесию предельной системы. Показывается, что в зависимости от структуры и параметров возмущений, одно из этих решений может быть устойчивым, мета-устойчивым или неустойчивым, при этом другое решение всегда является неустойчивым.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 20-11-19995.

Список литературы

[1] Sultanov O. A., *Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation*, Internat. J. Bifur. Chaos., 31 (2021), 2150137.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия. Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия. Email: oasultanov@gmail.com

О ВЯЗКИХ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ТЕРСЕНОВ А.С.

В докладе будет рассмотрена первая краевая задача для анизотропного параболического уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = g(t,x,u,\nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{1}$$

где Ω – ограниченная область. Уравнения вида (1) принадлежат к классу уравнений, часто называемых уравнениями с нестандартными условиями роста. Они используются при моделировании течений неньютоновских жидкостей, как дилатантных, так и псевдопластичных, при описании течений жидкости в пористых средах. Как известно, для исследования этих уравнений широко используются методы вариационного исчисления, использование которых встречает серьезные трудности в случае, когда правая часть зависит от градиента. К классическим методам исследования этих уравнений можно также отнести и различные аппроксимационные методы.

Как известно, для решений анизотропных параболических уравнений вопрос о $\mathbb{C}^1$-регулярности по пространственным переменным на сегодняшний день является открытым. В работе V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini (2013) для уравнения (1), в случае $g \equiv 0$ и постоянных показателей анизотропности, была доказана липшицевость по пространственным переменным соболевских решений при условии

$$2 \leq \min_i p_i \leq \max_i p_i < \min_i p_i + \frac{4}{n+2}.$$

Это максимальная регулярность решений анизотропных уравнений, известная на сегодняшний день.

Нашей целью было найти условия, гарантирующие существование и единственность решений указанной гладкости для уравнений вида (1) в случае, когда показатели анизотропности зависят от времени, а g нелинейна по градиенту.

Для получения решения высокой гладкости мы использовали аппроксимацию решения уравнения (1) последовательностью классических решений регуляризованных уравнений. Задача предельного перехода в классе соболевских решений осложнялась наличием нелинейного градиентного члена. Эта проблема была решена с помощью теории вязких по Лионсу решений.

В выпуклых областях были доказаны существование и единственность непрерывных по Липшицу по простанственным переменным вязких решений первой краевой задачи для (1) без ограничения бернштейновского типа на нелинейность градиенту. В невыпуклых областях, удовлетворяющих условию внешней сферы, были получены аналогичные результаты, но только в случае, когда g по градиенту удовлетворяет условию Бернштейна, а показатели анизотропности связаны соотношением

$$\max_i p_i(t) \leq 2 \min_i p_i(t), \quad t \in [0, T].$$

Список литературы

[1] *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term // J. Math. Anal. Appl. (2019), V. 480 (1), Art. 123386., pp. 18.

[2] *Терсенов Ар. С.* Разрешимость задачи Дирихле для анизотропных параболических уравнений в невыпуклых областях // Сиб. журнал инд. матем., (2022), Т. 25 (1), с. 1–13

Институт математики им. Соболева С.Л. СО РАН, Россия.
Email: aterseno@math.nsu.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

ТИМОШИН М.И.

В книге [1] упоминается геометрический подход к моделированию с помощью дифференциальных уравнений. При таком подходе, дифференциальные уравнения, выбираемые для описания модели, являются наиболее элементарными уравнениями с требуемым поведением. Представление об уравнениях и поведении кривых третьего порядка можно получить на основании теоремы приведенной в работах [2],[3].

Теорема 1. *Каждая кривая третьего порядка с помощью аффинного преобразования приводится к одной из следующих канонических форм:*

1. $(x+a)(x^2+y^2-1)+by+c=0,$
2. $(x+a)(x^2+y^2+1)+by+c=0,$
3. $(x+a)(x^2+y^2)+by+c=0,$
4. $(x+a)(x^2-y^2-1)+by+c=0,$
5. $(x+a)(x^2-y^2+1)+by+c=0,$
6. $(x+a)(x^2-y^2)+by+c=0,$
7. $(x+a)(x^2-2y)+by+c=0,$
8. $(x+a)(y^2-2x)+by+c=0,$
9. $(x+a)(y^2-1)+by+c=0,$
10. $(x+a)(y^2+1)+by+c=0,$
11. $(x+a)y^2+by+c=0,$
12. $(x+a)(x^2-1)+by+c=0,$
13. $(x+a)(x^2+1)+by+c=0,$
14. $(x+a)x^2+by+c=0,$
15. $y^2=x^3+bx+c,$
где a,b,c- константы.

Некоторые примеры фазовых портретов построенных на основании кривых третьего порядка приведены в статье [4].

Наряду с геометрическим подходом алгебраические кривые представляют интерес и при рассмотрении заданных дифференциальных уравнений. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y), \qquad \frac{dx}{dt}=P(x,y). \tag{1}$$

Принято считать [5] весьма полезным преобразовать систему (1) к гамильтоновой форме

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}. \tag{2}$$

Очевидно, что задача приведения системы (1) к виду (2) эквивалентна задаче нахождения интегрирующего множителя дифференциального уравнения

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0.$$

В предлагаемом докладе, на примере уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + (x^2-1)\dot{x} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = (1-x^2)y - x$$

приводится алгоритм представления гамильтонина с помощью формулы Тейлора. Демонстрируется возможность описания периодического решения с помощью найденного поля алгебраических кривых.

Список литературы

[1] *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986, с. 243.

[2] *Тимошин М. И.* "Группы преобразований кривых третьего порядка"// Школа Науки -2018.- № 9 (9), С. 5-14.

[3] *Тимошин М. И.* "К вопросу об аффинной классификации кривых третьего порядка"// Школа Науки -2019.- № 2 (13), С. 1-2.

[4] *Тимошин М. И.* "Описание предельных циклов с помощью конформного отображения алгебраических кривых"// Школа Науки. 2021. №3(40). С. 1-7.

[5] *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. -М.: Наука, 1988, с. 328.

Ульяновский государственный технический университет, Россия.
Email: midvolga@mail.ru

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

ТЛЕУХАНОВА Н.Т.[1], БАШИРОВА А.Н.[2]

X, Y - пространства функций, определенных на отрезке $[0,1]$, таких, что $X \hookrightarrow L_1$. Пусть $\{\varphi_k\}$ - полная ортонормированная система. Пусть функции $f \in X$ соответствует ее ряд Фурье по данной системе $\{\varphi_k\}$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где a_k - коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}$ является мультипликатором Фурье из пространства X в пространство Y, если для функции $f \in X$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ найдется функция $f_\lambda \in Y$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k$ и оператор $\Lambda f = f_\lambda$ является ограниченным оператором из X в Y. Множество $m(X \to Y)$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным пространством с нормой $\|\lambda\|_{m(X\to Y)} = \|\Lambda\|_{X\to Y}$.

В данной работе будут рассмотрены мультипликаторы рядов Фурье по системе Хаара.

Система Хаара - это система функций $\chi = \{\chi_k^j(x)\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$, $x \in [0,1]$, в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_k^j(x)$, где $k = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots,2^k$ определяется так:

$$\chi_k^j(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \dfrac{2j-2}{2^{k+1}} < x < \dfrac{2j-1}{2^{k+1}} \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \dfrac{2j-1}{2^{k+1}} < x < \dfrac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & x \notin \left(\dfrac{j-1}{2^k}; \dfrac{j}{2^k}\right) \end{cases}$$

Множество индексов (k,j), определяющих систему Хаара, будем обозначать через Ω.

Рядом Фурье-Хаара функции $f(x) \in L_1[0,1]$ является ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\chi_k^j(x),$$

где $a_k^j(f) = (f, \chi_k^j)$ - коэффициенты Фурье-Хаара функции f.

В работе [2] доказано следующее утверждение: пусть $1 < p < q < \infty$, $1 \le r, s \le \infty$, для того, чтобы

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\to L_{q,s})} \asymp \sup_{(k,j)\in\Omega} |\lambda_k^j| 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

необходимо и достаточно, чтобы $r \le s$.

Таким образом, оставался открытым вопрос описания класса мультипликаторов рядов Фурье-Хаара $m\left(L_{p,r} \to L_{q,s}\right)$ при $r > s$. В данной работе мы исследуем класс мультипликаторов рядов Фурье-Хаара в более общей ситуации, охватывающей случай, когда $r > s$.

Пусть f измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения,

$$m(\sigma, f) = \mu\left(\{x : x \in [0,1], |f| > \sigma\}\right)$$

ее функция распределения. Функция

$$f^*(t) = \inf\left\{\sigma : m(\sigma, f) \leq t\right\}, \quad t > 0$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$. Пространство Лоренца $L_{p,r}[0,1]$ определим как пространство измеримых функций f, определенных на $[0,1]$, для которых конечны величины:

если $r < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,r}} = \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

если $r = \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

Тогда верна следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < r, s \leq \infty$, $\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)_+ = \max\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}, 0\right\}$, *тогда*

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\to L_{q,s})} \asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k} \sup_{1\leq j\leq 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

в случае, когда $\tau = +\infty$, *выражение справа заменяется на* $\sup\limits_{\substack{0\leq k\leq\infty \\ 1\leq j\leq 2^k}} 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}|\lambda_k^j|$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP09260223.

Список литературы

[1] *Б.С. Кашин, А.Л.Саакян Ортогональные ряды. М.:Наука, 1984.*

[2] *О.В. Лелонд, Е.М. Семенов, С.Н. Уксусов Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара. Сиб. мат. журнал, 46:1 (1998), 83–102.*

[3] *Й. Берг, Й. Лефстрем Интерполяционные пространства.Введение пер. с англ.М: Мир, 1980.*

[4] *Е.Д. Нурсултанов, Т.У. Аубакиров Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье-Хаара. Матем. заметки, 73:3 (2003), 340–347.*

[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Казахстан, г. Нур-Султан. Email: tleukhanova@rambler.ru
[2]Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Казахстан, г. Нур-Султан. Email: anar_bashirova@mail.ru

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ СТЕПЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

ТУМАНОВ С.Н.

Рассматривается оператор

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием Дирихле при $c \in \mathbb{C}$, $|\arg c| < \pi$, $\alpha > 0$.

Оператор $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ имеет компактный обратный, спектр его дискретный, корневые подпространства одномерны [1].

При $0 < |\arg c| < \pi$ он не самосопряжен, более того, обладает плохими спектральными свойствами: норма резольвенты экспоненциально растет при удалении от спектра [2]; растут нормы спектральных проекторов [3]. В этих условиях оператор не может быть подобным самосопряженному, его собственные функции не образуют базиса Рисса в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тем не менее, вопрос полноты его системы собственных функций (с.с.ф.) в $L_2(\mathbb{R}_+)$, вообще говоря, открыт.

Для $\alpha \geq 2$ задача о полноте с.с.ф. $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ вполне исследована [2, 4]: система полна при всех $c \in \mathbb{C}$: $|\arg c| < \pi$.

При $\alpha \in (0, 2)$ полнота доказана для $|\arg c| < t_0(\alpha) = 2\pi\alpha/(\alpha+2)$ [4]. В то же время, при $t_0(\alpha) \leq |\arg c| < \pi$ вопрос почти не изучен, так как является гораздо более сложной задачей. Соответствующие аргументы приводятся в работах [1, 4].

Мы покажем, что существует $\Delta t = \Delta t(\alpha) > 0$ (непрерывно зависящее от α) такое, что с.с.ф. $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ полна при $|\arg c| < t_0(\alpha) + \Delta t(\alpha)$.

Сформулируем основной результат работы.

Для комплексных чисел $\zeta = |\zeta|e^{i \arg \zeta}$, $-\pi < \arg \zeta \leq \pi$ и вещественных β, через ζ^β будем обозначать главную ветвь: $\zeta^\beta = |\zeta|^\beta e^{i\beta \arg \zeta}$.

Для $\theta \in [t_0(\alpha), \pi) \cap [t_0(\alpha), \pi\alpha)$, положим

$$\zeta_0(\theta) = e^{i(t_0(\alpha)-\theta)/\alpha}, \quad Z_0(\theta) = (\sin t_0(\alpha)/\sin\theta)^{1/\alpha},$$

и определим функцию

$$\rho(\theta)=\Re\Big\{\int\limits_0^{Z_0(\theta)}\sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha-e^{it_0(\alpha)}}\,d\zeta-2\int\limits_0^{\zeta_0(\theta)}\sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha-e^{it_0(\alpha)}}\,d\zeta\Big\}=$$

$$=\Re\Big\{\int\limits_{\zeta_0(\theta)}^{Z_0(\theta)}\sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha-e^{it_0(\alpha)}}\,d\zeta-\int\limits_0^{\zeta_0(\theta)}\sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha-e^{it_0(\alpha)}}\,d\zeta\Big\},$$

где интегрирование ведется по отрезкам, а ветви корня выбрана так, чтобы

$$\Re\int\limits_0^{Z_0(\theta)}\sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha-e^{it_0(\alpha)}}\,d\zeta>0,\quad \Re\int\limits_0^{\zeta_0(\theta)}\sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha-e^{it_0(\alpha)}}\,d\zeta>0.$$

Теорема 1. *Для любого* $\alpha\in(0,2)$ *функция* $\rho(\theta)$ *имеет единственный ноль* $\theta_0(\alpha)$ *внутри интервала:* $(t_0(\alpha),\pi)\cap(t_0(\alpha),\pi\alpha)$

$$\theta_0(\alpha)=t_0(\alpha)+\Delta t(\alpha),\quad \Delta t(\alpha)>0.$$

Функция $\theta_0(\alpha)$ *непрерывна при* $\alpha\in(0,2)$.

При $|\arg c|<\theta_0(\alpha)$ *с.с.ф. оператора* $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ *полна в* $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 20-11-20261).

Список литературы

[1] S. Tumanov, *Completeness theorem for the system of eigenfunctions of the complex Schrödinger operator* $\mathcal{L}_c=-d^2/dx^2+cx^{2/3}$, J. Funct. Anal., 2020, https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108820

[2] E. B. Davies *Wild spectral behaviour of anharmonic oscillators*, Bull. Lond. Math. Soc., **32**:4, 2000, 432–438

[3] B. Mityagin, P. Siegl and J. Viola *Differential operators admitting various rates of spectral projection growth*, J. Funct. Anal., **272**:8, 2017, 3129–3175

[4] А. М. Савчук и А. А. Шкаликов, *Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси*, Функц. анализ и его прил., **51**:1, 2017, 82–98

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия.
Email: sergey.tumanov@yahoo.com

О СХОДИМОСТИ АТТРАКТОРОВ АППРОКСИМАЦИЙ К АТТРАКТОРАМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА

ТУРБИН М.В.[1], УСТЮЖАНИНОВА А.С.[2]

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^3 рассматривается система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \Delta v}{\partial x_i} + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{2}$$

В этой системе $v(x, t)$ – вектор скорости частицы жидкости в точке x в момент времени t; $p(x, t)$ – давление жидкости в точке x в момент времени t; $f(x, t)$ – вектор плотности внешних сил; $\nu > 0, \varkappa > 0$ – вязкость жидкости и время релаксации, соответственно. Неизвестными функциями являются v и p.

Система уравнений (1),(2) впервые была получена В.А. Павловским в работе [1] и была подтверждена позднее экспериментальными исследованиями слабо концентрированных водных растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы.

Для системы (1),(2) рассматривается начально-краевая задача с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a; \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) параметры ν, $\varkappa$, а также плотность внешних сил f считаются раз и навсегда зафиксированными.

Разрешимость в слабом смысле рассматриваемой начально-краевой задачи (1)–(3) на произвольном конечном промежутке времени $[0, T]$ была установлена в работе [2]. Существование траекторного и глобального аттракторов для этой задачи доказано в [3]. Важно отметить, что в трехмерном случае теоремы единственности слабых решений задачи (1)–(3) не доказано.

Для задачи (1)–(3) рассматривается аппроксимационная задача, для которой имеет место теорема единственности решений и свойство непрерывной зависимости решений от данных задачи. Таким образом, для этой аппроксимационной задачи возможно воспользоваться различными численными методами. Далее для исходной и аппроксимационной задач вводятся пространства траекторий и доказывается существование минимального траекторного и глобального аттракторов. После чего устанавливается, что траекторные и глобальные аттракторы аппроксимационной задачи сходятся к траекторным и глобальным аттракторам задачи (1)–(3) в смысле полуотклонения в соответствующих пространствах при стремлении параметра аппроксимации к нулю. Полученный результат должен позволить получить численное представление об аттракторах изучаемой модели.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-01-00051.

Список литературы

[1] *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.

[2] *Турбин М. В., Устюжанинова А. С.* Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров // Известия вузов. Математика. 2019. № 8. С. 62-78.

[3] *Устюжанинова А. С., Турбин М. В.* Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина-Фойгта // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. № 1. С. 126-138.

[1]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: mrmike@mail.ru
[2]Воронежский государственный университет, Россия.
Email: nastyzhka@gmail.com

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

ФАЗУЛЛИН З.Ю.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор L_0. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора L_0, пронумерованные в порядке возрастания с учетом их алгебраических кратностей ($\lambda_k \leq \lambda_{k+1}, k = 1, 2...$), $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $\mathcal{H}$ из ортонормированных собственных функций, соответствующих собственным числам λ_k. Далее, пусть V — симметрический L_0-компактный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда, по хорошо известной теореме Като-Реллиха, оператор $L = L_0 + V$ замкнут в области определения оператора L_0, полуограничен снизу и имеет дискретный спектр. Обозначим через $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора L, пронумерованные в порядке роста с учетом их кратностей. Пусть $R_0(-\lambda) = (L_0 + \lambda I)^{-1}$, $\lambda > 0$, и $K_0(\lambda) = (R_0(-\lambda)V)^2 R_0(-\lambda)$. Тогда, если $K_0(\lambda)$ — ядерный оператор, то, воспользовавшись результатами § 1 работы [1], устанавливаем, что при $\lambda >> 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k}{(\lambda_k + \lambda)^2} = f_1(\lambda)\left(1 + O(\|R_0(-\lambda)V\|)\right), \tag{1}$$

где

$$f_1(\lambda) = 3 \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\int_0^t \tau(s)ds + \sum\limits_{\lambda_k<t} [(Vf_k, f_k)^2 - (\lambda_k - \mu_k)^2]}{(t+\lambda)^4} dt,$$

$$\tau(s) = \sum_{\lambda_k<s} \sum_{\lambda_m \geq s} (\lambda_m - \lambda_k)^{-1} (Vf_k, f_m)^2$$

Равенство (1) позволяет доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть V — симметрический L_0-компактный оператор в $\mathcal{H}$ и $\operatorname{tr} K_0(\lambda) < \infty$.*

Тогда существует подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} (\lambda_k + (Vf_k, f_k) - \mu_k) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$f_1(\lambda) = o(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to +\infty.$$

Далее рассмотрим один из способов расстановки скобок суммирования,а именно рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\nu_k} (\bar{\lambda}_k - \mu_i^{(k)}) + \operatorname{tr} P_k V \right]. \qquad (2)$$

$\bar{\lambda}_k < \bar{\lambda}_{k+1}$, ν_k – кратность $\bar{\lambda}_k$. P_k – собственный проектор, соответствующий $\bar{\lambda}_k$.

Как правило такая расстановка скобок возникает при исследовании возмущений двумерных модельных операторов математической физики (см. [2]). Справедлива.

Теорема 2. *Пусть ряд (2) сходится. Тогда для справедливости соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c_0 > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(\lambda) \sim c_0 \lambda^{-2} \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Исследование выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Список литературы

[1] *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Неядерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Матем. сб., **196**:12 (2005), 123-156.
[2] *Фазуллин З.Ю., Абузярова Н.Ф.* О необходимом и достаточном условии в теории регуляризованных следов // Уфимск. матем. журн., **12**:4 (2020), 92-100.

Башкирский государственный университет, Россия.
Email: fazullinzu@mail.ru

О СПЕКТРЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

ФЕДОТОВ А.А.

Исследуется оператор $\mathcal{A}_\theta$, действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(\mathcal{A}_\theta u)_l = u_{l+1} + u_{l-1} + \lambda e^{-2\pi i(\theta+\omega l)} u_l.$$

Здесь l – целочисленная переменная, а $\omega \in (0,1)$, $\lambda > 0$ и $\theta \in [0,1)$ – частота, константа связи и фаза – параметры. При $\omega \notin \mathbb{Q}$ он является простейшим несамосопряженным квазипериодическим оператором. В [1] для диофантовых ω спектр описан как множество и показано, что при $\lambda < 1$ он непрерывен, а при $\lambda > 1$ есть плотный точечный спектр. В [2] результат о геометрии спектра был обобщен на все иррациональные ω.
Теперь, с помощью метода монодромизации – перенормировочного подхода, предложенного В. С. Буслаевым и А. А. Федотовым, см. обзор [3], очень естественно описана геометрия спектра $\mathcal{A}_\theta$ как сразу для всех иррациональных, так и для рациональных частот, на спектре вычислен показатель Ляпунова, очень точно описаны условия, определяющие границу множества значений параметров, для которых возникает точечный спектр.

Доклад основан на работе, выполненной в соавторстве с Д. И. Борисовым (Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа).

Список литературы

[1] *Sarnak P.* Comm. Math. Phys. 1982, 84(3): 377–401.
[2] *Boca F.P.* Duke Math. J. 2000, 101(3): 515–528.
[3] *Федотов А.А.* Алгебра и анализ, 2013, 25(2): 203–235.

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия.
Email: a.fedotov@spbu.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ФИЛИМОНОВА И.В.

Во время доклада предполагается рассказать результаты о поведении положительных решений полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + a_0 u^q, 0 < q < 1. \qquad (1)$$

определенных в цилиндрической области $\Omega \times (0,\infty)$, где $\Omega \subset R^n$ ограничена. Коэффициенты $a_{i,j}(x,t)$ - ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие по x условию равномерной эллиптичности $\lambda_1|\xi|^2 < \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j < \lambda_2|\xi|^2$, постоянные $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ не зависят от t. Коэффициент $a_0 = const > 0$. Под решением уравнения (1), удовлетворяющим условию Неймана на $\partial\Omega \times (0,\infty)$, понимается функция из $W^{1,1}_{2,loc}$ удовлетворяющая уравнению (1) в смысле интегрального тождества. Известно, что для решений в смысле интегрального тождества выполнен принцип максимума и теорема о сравнении решений.

Решения уравнения вида (1), с отрицательной постоянной a_0, рассматривались в работе [1].

Во время доклада будет рассказано, что асимптотическое поведение при $t \to \infty$ положительных решений u, удовлетворяющих условию Неймана на $\partial\Omega \times (0,\infty)$, эквивалентно решению обыкновенного дифференциального уравнения $\dot\alpha = a_0\alpha^q$. Более того имеет место

Теорема 1. *Пусть u — положительное в $\Omega \times (0,\infty)$ решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее условию Неймана. Тогда*

$$u(x,t) = [a_0(1-q)(t+t_0)]^{1/(1-q)} + O(e^{-\delta t}),$$

где $\delta > 0$ не зависит от $u(x,t)$, а постоянная t_0 однозначно определяется решением $u(x,t)$.

Представляется интересным, то что на асимптотическое поведение решения не влияет зависимость коэффициентов от t. Подобная теорема имеет место, также для уравнения, содержащего первые производные от u. Данный результат аналогичен результатам для решений эллиптического уравнения, работы [2].

Список литературы

[1] *В. В. Чистяков* О свойствах решений полулинейных параболических уравнений второго порядка, Труды семинара имени И.Г.Петровского, вып. 15 (1991), стр. 70-107

[2] *В. А. Кондратьев* О решениях нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях, Фундамент. и прикл. матем., 2:3 (1996), 863–874

Московский государственный университет им М.В.Ломоносова, Россия.
Email: filimi@yandex.ru

О КОЭФФИЦИЕНТАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ФИЛИНОВСКИЙ А.В.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — ограниченная область с гладкой границей Γ. Рассмотрим спектральные задачи Робена

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\right)\bigg|_{x\in\Gamma} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

(ν — единичный вектор внешней нормали к Γ) и Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\lambda_1^R(\alpha)$ первое собственное значение задачи Робена (1), а через λ_1^D – первое собственное значение задачи Дирихле (2). Будем обозначать через $u_1^D(x)$ нормированную в $L_2(\Omega)$ первую собственную функцию задачи Дирихле.

Теорема 1. [1, 2, 3] *Для первого собственного значения задачи* (1) *справедливо асимптотическое представление*

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - a_1\alpha^{-1} - a_2\alpha^{-2} + o\left(\alpha^{-2}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{3}$$

где

$$a_1 = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds, \quad a_2 = \int_\Gamma \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} ds, \tag{4}$$

функция $v \in H^1(\Omega)$ *– решение краевой задачи*

$$\Delta v + \lambda_1^D v = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds\, u_1^D, \quad x \in \Omega, \quad v|_{x\in\Gamma} = -\left.\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right|_{x\in\Gamma}, \tag{5}$$

удовлетворяющее условию

$$\int_\Omega v u_1^D dx = 0.$$

Задача (5) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* (6).

Нас будут интересовать оценки коэффициентов асимптотической формулы (3).

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset B_{R_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_0\}$ *и* $\boldsymbol{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \in C^1(\overline{\Omega})$ *– векторное поле. Тогда справедливы оценки*

$$\frac{2\lambda_1^D}{R_0} \le a_1 \le 4n \inf_{\substack{\boldsymbol{b} \in C^1(\overline{\Omega}) \\ \boldsymbol{b}|_\Gamma = \nu}} \max_{i,j=1,\dots,n} \|(b_i)_{x_j}\|_{C(\overline{\Omega})} \lambda_1^D, \tag{6}$$

$$\|f(x)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|.$$

Для областей определенной геометрии можно получить и другие оценки для коэффициента a_1.

Определение 1. Поверхность Γ называется строго звездной, если для всех $x \in \Gamma$ выполнено неравенство $(\nu, x) > 0$.

Теорема 3. *Если* Γ *– строго звездная поверхность, то имеет место оценка*

$$a_1 \le \frac{2\lambda_1^D}{\inf\limits_{x \in \Gamma} (\nu, x)}. \tag{7}$$

Замечание 1. В случае $\Omega = B_{R_0}(0)$ из (6), (7) следует, что $a_1 = \frac{2\lambda_1^D}{R_0}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 20-11-20272.

Список литературы

[1] *Filinovskiy A. V.* On the asymptotic behavior of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter // J. ellipt. parab. equ., 2015, V. 1, p. 123–135.

[2] *Филиновский А. В.* Об асимптотическом поведении собственных значений краевой задачи с параметром // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 6 (128). С. 135–140.

[3] *Filinovskiy A. V.* On the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Robin problem with large parameter // Math. Model. Anal. 2017. V. 22. P. 37–51.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия. Email: flnv@yandex.ru

О КОЛЕБАНИИ СИСТЕМЫ ТЕЛ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОДЕМПФИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

ФОРДУК К.В.

Исследуется система твердых тел, последовательно соединенных пружинами, первое и последнее тела прикреплены пружинами к двум опорам с заданным законом движения. Каждое тело представляет собой открытый сосуд, частично заполненный идеальной однородной жидкостью. Демпфирующие силы порождаются трением тел о неподвижную горизонтальную опору.

Для рассматриваемой задачи выведен закон баланса полной энергии, на основании которого осуществляется выбор гильбертовых пространств и их подпространств, в которых естественно исследовать поставленную задачу. Методом ортогонального проектирования, изложенным в [1], исходная начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств:

$$\mathcal{C}\frac{dz}{dt} + (\mathcal{P} + i\mathcal{B})z = f, \quad z(0) = z^0,$$

где

$$z := (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} := \big(\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^n\big) \oplus \big(L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^n\big).$$

С использованием приведенной задачи Коши доказана теорема о существовании и единственности решения исследуемой начально-краевой задачи (см. [2]).

В задаче о нормальных колебаниях рассматриваемой системы доказано, что спектр исследуемой задачи симметричен относительно действительной оси, расположен в полосе $\{0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \widetilde{\alpha}c^{-1}\}$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности со следующим асимптотическим поведением:

$$\lambda_k^{(\pm i)} = \pm i\bigg(\sum_{l=1}^{n} \frac{g\pi}{|\Gamma_l|}\bigg)^{1/2} k^{1/2}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty),$$

где g — ускорение свободного падения, $|\Gamma_l|$ — площади свободных поверхностей. Система собственных и присоединенных элементов исследуемой спектральной задачи образует базис Абеля-Лидского со скобками в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ порядка $\beta > 1$ (см. [3]).

Список литературы

[1] *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.
[2] *Forduk K. V., Zakora D. A.* Problem on small motions of a system of bodies filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, №5. P. 889–900.
[3] *Forduk K. V., Zakora D. A.* A problem of normal oscillations of a system of bodies partially filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. Vol. 18, №2. P. 997–1014.

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Россия.
Email: forduk_kv@mail.ru

О ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ С ТРЕЩИНАМИ

ХЛУДНЕВ А.М.

В докладе обсуждаются задачи равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения различной природы при наличии отслоений. Поведение включений описывается на основе моделей балки Бернулли-Эйлера и моделей балки Тимошенко, а также различных предельных моделей, полученных после предельных переходов по физическим параметрам. Отслоение включения от упругого тела означает наличие трещины между включением и окружающим его упругим телом. На берегах трещин задаются нелинейные граничные условия, не допускающие взаимного проникания противоположных берегов. Исследуется широкий класс задач сопряжения между тонкими включениями, в частности, найдены краевые условия в точке стыка. Дано обоснование предельных переходов по параметру жесткости тонких включений при стремлении параметра к бесконечности.

Список литературы

[1] *Khludnev A. M., Popova T. S.* Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies. Quart. Appl. Math., 2016, V. 74, N 4, P. 705-718.
[2] *Faella L., Khludnev A. M.* Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies. Math. Meth. Appl. Sci., 2016, N 12, P. 3381-3390.
[3] *Khludnev A. M., Popova T. S.* Junction problem for rigid and semirigid inclusions in elastic bodies. Arch. Appl. Mech., 2016, N 9, P. 1565-1577.

[4] *Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S.* Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies. Math. Mech. Solids, 2017, V. 22, N 4, P. 737-750.

[5] *Khludnev A. M., Popova T. S.* On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies. Z. Angew. Math. Mech., 2017, N 11, C. 1406-1417.

[6] *Khludnev A. M., Popova T. S.* Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control. Comp. and Math. with Appl., 2019, V. 77, N 1, P. 253-262.

[7] *Хлуднев А. М., Попова Т. С.* О задаче сопряжения двух слабо искривленных включений в упругом теле. Сиб. мат. журнал, 2020, Т. 61, N 4, С. 932-945.

[8] *Khludnev A. M., Popova T. S.* On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body. Z. Angew. Math. Mech., 2020, e202000063.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Россия.
Email: khlud@hydro.nsc.ru

СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА

ЧЕЧКИНА А.Г.

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Мы предполагаем, что часть границы Γ_2 ($\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) лежит на гиперплоскости $x_n = 0$, при этом она состоит из трех частей α_ε, β_ε и γ_ε, где α_ε и β_ε образуют единую часть, которую мы обозначаем Γ_ε. Здесь $\gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$ — объединение $n-1$-мерных шаров, а $\beta_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{N_\delta} \beta_\varepsilon^i$ — объединение шаровых слоев. Поясним теперь построение. Пусть γ^0 — это $n-1$-мерный шар $\{(\xi_1,\dots,\xi_n) \mid \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2,\ \xi_n = 0\}$ и пусть $\beta^0 = \{(\xi_1,\dots,\xi_n) \mid \varepsilon^2 < \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < 2\varepsilon^2,\ \xi_n = 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\xi = \dfrac{x}{\delta}$, γ и β — области, полученные целочисленными сдвигами множеств γ^0 и β_0 на гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$ с центрами в точках $\widetilde{\xi}_k = (k_1,\dots,k_{n-1},0)$, $k_1,\dots,k_{n-1} \in \mathbb{N}$. Обозначим $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ — гомотетичное сжатие $\delta\gamma$ и $\widetilde{\beta}_\varepsilon$ — гомотетичное сжатие $\delta\beta$. При этом (см. рисунок)

$$\gamma_\varepsilon = \widetilde{\gamma}_\varepsilon \cap \partial\Omega, \qquad \beta_\varepsilon = \widetilde{\beta}_\varepsilon \cap \partial\Omega \qquad \alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \setminus (\beta_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon).$$

Предполагается, что параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между участками γ_ε^i и β_ε^i на границе, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Также заметим, что количество участков β_ε^i и соответственно участков γ_ε^i имеет следующий порядок: $N_\delta = O\Big(\dfrac{1}{\delta^{n-1}}\Big)$.

В области Ω рассматривается задача типа Стеклова с быстро меняющимся условием (чередуется условие Стеклова и однородное условие Дирихле) вида

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_n} = \lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \qquad \rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\varepsilon\delta)^m}, & x \in \beta_\varepsilon, \\ 1, & x \in \alpha_\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Таким образом, коэффициент в условии Стеклова является быстро осциллирующей функцией, зависящей от малого параметра ε, которая имеет порядок $O(1)$ вне мелких включений в виде шаровых слоев на границе, где она имеет порядок $O\big((\varepsilon\delta)^{-m}\big)$. Эти включения диаметра $O(\varepsilon\delta)$, расположены на расстоянии друг от друга порядка $O(\delta)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$. В случае $m < 2$ (слабая сингулярность) оценена скорость сходимости при стремлении малого параметра к нулю решений исходной задачи к решению задачи

$$\begin{cases} \Delta u_0^k = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_0^k = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (P = +\infty), \\ \left[\begin{array}{c} \frac{\partial u_0^k}{\partial x_n} + P\frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u_0^k = \lambda_0^k u_0^k \quad \text{на } \Gamma_2, \\ u_0^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \displaystyle\int\limits_{\Gamma_2} u_0^k u_0^l d\widehat{x} = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \le \lambda_0^2 \le \cdots, \end{array} \right], (P < +\infty), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}.$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_0^k, \lambda_\varepsilon^k$ являются собственными значениями задач* (2) *и* (1)*, соответственно. Тогда*

$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \le C_k^1\Big((\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \Big|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\Big| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\Big), \quad \text{если } P < \infty,$$

$$\lambda_\varepsilon^k \to +\infty \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{если } P = +\infty,$$

где постоянные C_k^1, C_k^2 не зависят от ε.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 22-21-00292.

Список литературы

[1] *Чечкина А. Г.* О поведении спектра возмущенной краевой задачи стеклова со слабой сингулярностью. // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 10, С. 1407–1420.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: chechkina@gmail.com

ОБ УСЛОВИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

ЧУДИНОВ К.М.

Будем говорить, что вещественнозначная функция, определенная на $\mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty)$, *осциллирует*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Заметим, что решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка с последействием могут осциллировать. Так, решения автономного уравнения $\dot{x}(t) + ax(t-r) = 0$ осциллируют, если $ar > 1/e$.

Рассмотрим неавтономное уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a, h \in C(\mathbb{R}_+)$, $a(t) \geq 0$, $h(t) \leq t$, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$.

Следующая хорошо известная теорема обобщает результаты, полученные в середине XX в. А. Д. Мышкисом [1].

Теорема 1 ([2]). *Если* $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения* (1) *осциллируют.*

Обобщение теоремы 1 на уравнение с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $a_k(t) \geq 0$, $h_k(t) \leq t$, $\lim\limits_{t\to+\infty} h_k(t) = +\infty$, $k = 1, \ldots, n$, оказалось нетривиальной задачей.

В работе [3], по-видимому, впервые показано, что условие

$$\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{h_k(t)}^{t} a_k(s)\,ds > 1/e$$

не гарантирует осцилляции решений уравнения вида (2).

Определим n семейств множеств

$$E_k(t) = \{s \geq t \mid h_k(s) < t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Теорема 2 ([4]). *Если* $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k(t)} a_k(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения* (2) *осциллируют.*

Следствие 1. *Пусть все функции* h_k *непрерывны и строго монотонно возрастают. Если* $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{t}^{h_k^{-1}(t)} a_k(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения* (2) *осциллируют.*

Заметим, что даже в случае $n = 1$ область применимости теоремы 2 существенно шире области применимости теоремы 1.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, госзадание FSNM-2020-0028.

Список литературы

[1] *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. 1951. № 3. С. 641–658.

[2] *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1463–1465.

[3] *Чудинов К. М.* О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием // Изв. вузов. Матем. 2018. № 5. С. 93–98.

[4] *Чудинов К. М.* Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе — Чантурия // Сиб. матем. ж. 2020. Т. 61, № 1. С. 224–233.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия. Email: cyril@list.ru

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ГАМИЛЬТОНИАНА ОТ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ШАГАЛОВА Л.Г.

Пусть заданы момент времени $T > 0$ и значение $x^* \in R$. В области $G^+ = \{(t,x)|0 < t < T,\, x > x^*\}$ рассматривается следующее уравнение Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0,T),\ x \in R, \tag{1}$$

где гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = f(x)e^p. \tag{2}$$

Здесь $f(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция, такая, что $f(x^*) > 0$.

Также заданы непрерывно дифференцируемая функция $u_0 : R \to R$ и субдифференцируемая функция $\varphi : [0,T] \to R$ такие, что существует левая производная $\varphi'_{-}(0)$ функции φ в точке 0, и справедливы равенства

$$\varphi(0) = u_0(x^*), \quad \varphi'_{-}(0) = u'_0(x^*). \tag{3}$$

Требуется построить вязкостное решение [1] $u(\cdot,\cdot)$ уравнения (1), непрерывное в замыкании области G^+ и такое, что выполнены следующие начальное и граничное условие

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in R, \quad x \geq x^*, \tag{4}$$

$$u(t,0) = \varphi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Доказано, что непрерывное вязкостное решение начально-краевой задачи (1)-(5) существует. Указаны достаточные условия, при которых такое решение единственно.

Решение рассматриваемой задачи базируется на минимаксном подходе [2], методе обобщенных характеристик [3], а также на решении вариационных задач с подвижными границами. Рассматриваемая задача, представляющая и самостоятельный интерес, возникает при построении непрерывного обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с разрывным по фазовой переменной гамильтонианом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-01-00362.

Список литературы

[1] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol.277, no. 1. P. 1-42.

[2] *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995.

[3] *Subbotina N.N.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Mathematics and its Applications. 2004. Vol. 20. P. 2955-3091.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия. Email: shag@imm.uran.ru

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

ШАДРИНА Н.Н.

Исследована разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка с разрывным знакопеременным коэффициентом при старшей производной по временной переменной.

Рассматривается ограниченная область Ω из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей Γ, T есть заданное положительное число, Q_1 и Q_2 есть цилиндры $\Omega\times(-T,0)$ и $\Omega\times(0,T)$ соответственно, $\varphi(t)$, $\psi(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $t\in[-T,T]$, $x\in\overline{\Omega}$, $\alpha=(\alpha_i)$, $\beta=(\beta_i)$, $i=\overline{1,6}$ — заданные векторы с действительными координатами, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv=\varphi(t)D_t^3v+\Delta v.$$

Функция $u(x,t)$ будет являться в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$Lu=f(x,t).$$

Кроме того, для функции $u(x,t)$ выполняются условия

$$\alpha_1u(x,-0)+\alpha_2u(x,+0)+\alpha_3u_t(x,-0)+\alpha_4u_t(x,+0)+$$
$$+\alpha_5u_{tt}(x,-0)+\alpha_6u_{tt}(x,+0)=0,\quad x\in\Omega,$$
$$\beta_1u(x,-0)+\beta_2u(x,+0)+\beta_3u_t(x,-0)+\beta_4u_t(x,+0)+$$
$$+\beta_5u_{tt}(x,-0)+\beta_6u_{tt}(x,+0)=0,\quad x\in\Omega,$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(-T,0)}=0,\quad u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}=0,$$

Для данной задачи доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений.

Далее исследуется влияние параметров на корректность некоторой задачи сопряжения для дифференциального уравнения типа Буссинеска - Лява.

Здесь T_1, T_2 есть заданные положительные числа, Q_1 и Q_2 есть цилиндры $\Omega\times(-T_1,0)$ и $\Omega\times(0,T_2)$ соответственно, $f(x,t)$ есть заданная функция, определенная при $(x,t)\in\overline{Q_1}\cup\overline{Q_2}$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$, α, β, λ, μ — заданные действительные параметры,

Δ— оператор Лапласа по пространственным переменным, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = v_{tt} - \Delta v_{tt} + \lambda \Delta v - \mu v.$$

Для функции $u(x,t)$, являющейся в в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$Lu = f(x,t)$$

выполняются условия

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(-T_1,0)} = 0, \quad u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T_2)} = 0,$$

$$u(x,-T_1) = u(x,T_2) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,-0) = \alpha u(x,+0) + \varphi(x), \quad u_t(x,+0) = \beta u_t(x,-0) + \psi(x), \quad x \in \Omega.$$

Сформулированы теоремы, описывающие влияние параметров на единственность и неединственность, существование и несуществование регулярных решений данной задачи.

Данные исследования являются продолжением работ [1] – [2] автора в соавторстве с А. И. Кожановым.

Список литературы

[1] *Кожанов А. И., Шадрина Н. Н.* Краевые задачи с условиями сопряжения для квазипараболических уравнений третьего порядка с разрывным знакопеременным коэффициентом // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2021. — Т. 18. №1 — С. 599 - 616.

[2] *Шадрина, Н.Н.* О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2016. — Т. 13. — С. 411 - 425.

МГТУ им. Баумана, РТУ МИРЭА Россия. Email: shadrinann8@yandex.ru

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

ШАМОЛИН М.В.

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как известно [1, 2, 3], наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен. А вот для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4, 5, 6].

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 19-01-00016.

Список литературы

[1] Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.

[2] Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93. —№ 5. — С. 763–766.

[3] Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74. —№ 1(445). — С. 117–148.

[4] Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.

[5] Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады

РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 494. № 1. С. 105–111.
[6] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
[7] Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия. Email: shamolin@rambler.ru

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА

ШАПОШНИКОВ С.В.

Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t\mu_t = \partial_{x_i}\partial_{x_j}\big(a^{ij}\mu_t\big) - \partial_{x_i}\big(b^i\mu_t\big), \quad \mu_0 = \nu.$$

Отображение $t \mapsto \mu_t$ из отрезка $[0,T]$ в пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ называется решением, если это отображение непрерывно относительно слабой топологии и удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\,d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi\,d\nu + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}L\varphi\,d\mu_s\,ds$$

для всех $t \in [0,T]$ и всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, где

$$Lu = a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}u,$$

функции a^{ij}, b^i локально интегрируемы относительно меры $\mu_t\,dt$, а матрица $A(t,x) = (a^{ij}(t,x))_{i,j\le d}$ симметрична и неотрицательно определена.

Вероятностная мера P_ν на пространстве $\Omega_d := C([0,T],\mathbb{R}^d)$ называется решением мартингальной задачи с оператором L и начальным условием ν, если

(M1) $P_\nu\big(\omega\colon \omega(0)\in B\big) = \nu(B)$ для всех $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

(M2) для всякой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, отображение

$$(\omega,t) \mapsto f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t Lf(s,\omega(s))\,ds$$

является мартингалом относительно $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s\in[0,t])$ и P_ν.

Теорема 1. *Предположим, что* $\{\mu_t\}$ *является решением задачи Коши и выполняется условие*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|A(t,x)\| + |\langle b(t,x), x\rangle|}{(1+|x|)^2}\, \mu_t(dx)\, dt < \infty.$$

Тогда существует такое решение P_ν *мартингальной задачи с оператором* L *и начальным условием* ν, *что для всех* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *верно равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_t = \int_{\Omega_d} f(\omega(t))\, P_\nu(d\omega) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Отметим, что условие теоремы выполняется, если

$$\log(1+|x|^2) \in L^1(\nu),$$
$$\|A(t,x)\| \le C + C|x|^2 \log(1+|x|^2),$$
$$\langle b(t,x), x\rangle \le C + C|x|^2 \log(1+|x|^2).$$

Автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и благодарит жюри и спонсоров.

Список литературы

[1] *Figalli, A.* Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients. J. Funct. Anal. 254(1), 109–153 (2008)

[2] *Trevisan, D.* Well-posedness of multidimensional diffusion processes with weakly differentiable coefficients. Electron. J. Probab. 21, Paper No. 22, 41 pp. (2016)

[3] *Bogachev, V.I., Rockner, M., Shaposhnikov, S.V.* On the Ambrosio–Figalli–Trevisan Superposition Principle for Probability Solutions to Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. J. Dyn. Diff. Equat. 33, 715–739 (2021)

Механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: starticle@mail.ru

УРАВНЕНИЕ СТРУНЫ С ВЕСОМ — НЕКОМПАКТНЫМ МУЛЬТИПЛИКАТОРОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ ЯКОБИ

ШАРОВ Е.Б.[1], ШЕЙПАК И.А.[2]

Теория дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями активно развивается в последние два десятилетия. Если проследить основные тенденции развития этой теории, то можно выделить два основных направления: 1) построение операторных моделей для все более и более сингулярных коэффициентов; 2) нахождение новых классов сингулярных коэффициентов, для которых можно выделить общие характеристики определяемых операторов (тип спектра, асимптотики собственных значений, полнота системы собственных и присоединенных функций и т.д.)

В частности, вышесказанное можно отнести и к теории струны, моделью для которой является следующая спектральная задача

$$-y'' = \lambda P' y, \quad x \in (0;1) \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Отметим, что краевые условия влияют лишь на тонкие спектральные свойства задачи, для исследования основных свойств можно рассматривать произвольные самосопряженные краевые условия.

Пусть задано натуральное число $n \geqslant 2$, набор положительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^n a_k = 1$. Положим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_i$ при $k \geqslant 2$, при этом будем считать, что $\alpha_{n+1} = 1$. Зададим аффинные отображения отрезка $[0,1]$ на отрезки $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$:

$$S_k(x) = a_k x + \alpha_k.$$

Выделим один из индексов $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, в дальнейшем будем использовать обозначение $a := a_m$. Введем набор вещественных чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, вещественное число $d \neq 0$ и на множестве измеримых функций определим отображение G:

$$[G(f)](x) = \sum_{k=1, k\neq m}^{n} \beta_k \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})} + d(f\left(S_m^{-1}(x)\right) + \beta_m)\chi_{(\alpha_m, \alpha_{m+1})}. \tag{3}$$

Нас интересует случай $a|d| \leqslant 1$, при этом при некотором $p > 0$ будет выполнено $a|d|^p < 1$. Тогда отображение G будет сжимающем в (вообще говоря квазибанаховом) пространстве $L_p[0,1]$. Из свойств квазибанахова пространства следует существование и единственность неподвижной точки отображения G, т.е. такой функции f, для которой выполнено равенство $G(f) = f$. Эту функцию будем называть *n-звенной самоподобной.*

Введем пространство $l_{2,\frac{1}{d}}^{\overline{m}}$ со скалярным произведение

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{2,\frac{1}{d}}^{\overline{m}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{d^i} \sum_{k=1}^{n-1} \big(\frac{u_{ij} v_{ij}}{m_j}\big).$$

Через L обозначим матрицу Якоби с элементами, которые явным образом выражаются через параметры самоподобной функции P.

Теорема 1. *Пусть функция P является неподвижной точкой отображения G, заданного условием* (3), *где $a|d| \leqslant 1$. Тогда задача* (1)–(2) *для функций $y \in \mathring{W}_2^1[0,1]$ равносильна задаче $L\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ в пространстве $l_{2,\frac{1}{d}}^{\overline{m}}$.*

Мы дадим описание спектра в случае некомпактного мультипликатора ($a|d|=1$). При таких условиях матрица Якоби L становится периодической и после симметризации мы перейдем к матрице $\widetilde{L}$:

$$\widetilde{L}=\begin{pmatrix} w_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & w_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & w_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_{n-1} & b_{n-1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & w_1 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & w_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Введем функцию

$$r(\lambda)=(e_{11},(\widetilde{L}-\lambda I)^{-1}e_{11})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda},$$

где e_{11} — первый вектор базиса, в котором оператор $\widetilde{L}$ имеет вид (4), $\sigma(t)=(E_te_{11},e_{11})$, E_t — разложения единицы оператора $\widetilde{L}$. Справедлива следующая формула для функции $r(\lambda)$:

$$r(\lambda)=\cfrac{1}{w_1-\lambda-\cfrac{(b_1)^2}{w_2-\lambda-\cfrac{(b_2)^2}{\dots-\cfrac{(b_1)^2}{w_2-\lambda-\dots}}}}.$$

В силу периодичности матрицы Якоби $\widetilde{L}$, мы можем упростить эту дробь.

Определим многочлены $P_k(\lambda)$ и $Q_k(\lambda)$, которые называются ортогональными многочленами первого и второго рода соответственно, следующим образом:

$$P_k=\left|\begin{pmatrix} a_1-\lambda & b_1 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{k-1} \\ 0 & \dots & b_{k-1} & a_k-\lambda \end{pmatrix}\right|,$$

$$Q_k=\left|\begin{pmatrix} a_2-\lambda & b_2 & \dots & 0 \\ b_2 & a_3-\lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{k-1} \\ & & b_{k-1} & a_k-\lambda \end{pmatrix}\right|.$$

Теперь получим новый вид для $r(\lambda)$:

$$r(\lambda) = \frac{P_{n-1}(\lambda) - b_{n-1}^2 Q_{n-2}(\lambda)}{2b_{n-1}^2 P_{n-2}(\lambda)} \pm \frac{\sqrt{(P_{n-1}(\lambda) + b_{n-1}^2 Q_{n-2}(\lambda))^2 - 4b_{n-1}^2 P_{n-2}(\lambda) Q_{n-1}(\lambda)}}{2b_{n-1}^2 P_{n-2}(\lambda)}. \quad (5)$$

Определим также многочлены $L_k^{\pm}(\lambda)$, которые тесно связаны с ортогональными многочленами $P_k(\lambda)$ и $Q_k(\lambda)$

$$L_k^{\pm} = \left| \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & 0 & \dots & \pm b_k \\ b_1 & a_2 - \lambda & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{k-1} - \lambda & b_{k-1} \\ \pm b_k & 0 & \dots & b_{k-1} & a_k - \lambda \end{pmatrix} \right|.$$

Ввиду формулы (5) и свойств многочленов P_k, Q_k и $L_k^{\pm}$ справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция P является неподвижной точкой отображения G, заданного условием* (3), *где $ad = 1$. Тогда структура спектра задачи* (1)–(2) *имеет следующий вид:*

1) непрерывный спектр состоит из не более чем $n-1$ отрезка непрерывного спектра и имеет вид $\sigma_c(\widetilde{L}) = \{\lambda \mid L_{n-1}^{+}(\lambda) L_{n-1}^{-}(\lambda) \le 0\}$

2) вещественное число λ может быть собственным значением задачи тогда и только тогда, когда

а) $P_{n-2}(\lambda) = 0$

б) $L_{n-1}^{+}(\lambda) L_{n-1}^{-}(\lambda) > 0$

в) $sign(P_{n-1}(\lambda) + b_{n-2}^2 Q_{n-2}(\lambda)) = (-1)^{\nu+n}$, где ν - это номер лакуны, в которой лежит точка λ ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$).

Работа поддержана грантом РФФИ № 19-01-00240.

[1]МГУ имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

[2]МГУ имени М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ СИСТЕМАМИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ШКАЛИКОВ А.А.

1. Наша цель —изучить спектральные задачи в пространстве вектор-функций $L_2(\mathbb{C}^n;[0,1])$, порождаемые уравнениями вида

$$y' - A(x)y = \lambda B(x)y, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

и граничными условиями

$$U(y) = U_0 y(0) + U_1 y(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь λ — спектральный параметр, U_0 и U_1 – числовые (комплексные) $n \times n$ матрицы, $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$,

$$A(x) = \{a_{jk}(x)\}_{j,k=1}^n,$$

где $a_{jk} \in L_1[0,1]$, а матрица B диагональная

$$B(x) = \mathrm{diag}\,\{b_1(x), \dots, b_n(x)\},$$

причем вещественные функции b_j суммируемы и при некотором s, $1 \leqslant s \leqslant n-1$, выполнены условия

$$b_1(x) < b_2(x) < \dots < b_s < 0 < b_{s+1}(x) < \dots < b_n(x) \tag{3}$$

В случае $s = 0$ ($s = n$) считаем, что отрицательные (положительные) функции b_j отсутствуют. Здесь без пояснения оставим замечание, что такие системы возникают при решении методом Фурье гиперболических уравнений (уравнений, для которых корректна задача Коши). Поэтому такие спектральные задачи мы также будем называть *гиперболическими*. При дополнительном предположении, что функции b_j непрерывны, соответствующие задачи будем называть *строго гиперболическими*.

Теорема 1. *Положим*

$$E(x,\lambda) = diag\{e^{b_1 \lambda p_1(x)}, \dots, e^{b_n \lambda p_(x)}\},$$

$$p_j(x) = \int_0^x \rho(t)\,dt, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$M(x) = diag\{e^{a_{11}(x)}, \dots, e^{a_{nn}(x)}\}.$$

Пусть выполнено условие гиперболичности. Тогда при любом $h \in \mathbb{R}$ в полуплоскости $\mathbb{C}_h^+ = \{\lambda |\ Re\,\lambda \geqslant h\}$ существует фундаментальная матрица решений системы (1) *вида*

$$Y(x,\lambda) = M(x,\lambda)(E(x,\lambda) + R(x,\lambda)),$$

где $|R(x,\lambda)| \to 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$ *при* $\lambda \to \infty$ *в выбранной полуплоскости* $\mathbb{C}_h^+$. *Более того, в выбранной полуплоскости функция* $R(x,\lambda)$ *оценивается величинами вида*

$$\Upsilon(\lambda) = \max_{x,s} \left| \int_s^x a_{j,k}(t) \exp\left(\lambda(p_j(t) - p_l(s)) + \lambda(p_m(x) - p_r(t))\right) dt \right|,$$

(здесь индексы $j < l$, $m < r$ *фиксированы). Аналогичное утверждение справедливо для левой полуплоскости* $\mathbb{C}_h^- = \{\lambda |\ Re\,\lambda \leqslant h\}$.

Эта теорема имеет давнюю историю. Пионерами в этой тематике были Дж.Биркгоф, Я.Д.Тамаркин и Р.Лангер, достаточно полно библиография по этой теме изложена в недавней работе А.М.Савчука и А.А.Шкаликова [1]. Метод доказательства приведенной здесь Теоремы 1 в значительной степени использует идеи работы [1]. Отметим, что для 2×2 систем ($n = 2$) Теорема 1 при условии $b_1(x) < 0 < b_2(x)$, причем в усиленной форме, получена в заметке А.П.Косарева и автора [2].

Дадим определение регулярности спектральной задачи (1), (2). Это определение новое и более общее, нежели классические определения Биркгофа, Тамаркина и Лангера, которые имели дело с постоянными функциями b_j.

Рассмотрим упрощенную задачу, в которой матрица A в (1) заменена на диагональную матрицу

$$A_0(x) = \operatorname{diag}\left(a_{11}(x), \ldots, a_{nn}(x)\right).$$

В этом случае система (1) распадается на n независимых, явно решаемых уравнений первого порядка. Фундаментальная матрица решений упрощенной системы имеет вид

$$F(x,\lambda) = M(x,\lambda)E(x,\lambda).$$

Характеристический определитель спектральной задачи, порождаемой упрощенным уравнением (1) и краевыми условиями (2), также явно выписывается

$$\Delta_0(\lambda) = \det U(F(x,\lambda)) = \det U_0 F(0,\lambda) + U_1 F(1,\lambda) = \sum_m c_m e^{J_m \lambda}, \qquad (4)$$

где c_m — числа, а J_m — всевозможные суммы различных чисел из набора $p_1(1), p_2(1), \ldots, p_n(1)$. Индексам $m = 0$ и $m = 1$ поставим в соответствие числа

$$J_0 = p_1(1) + p_2(1) + \ldots, +p_s < 0,$$
$$J_1 = p_{s+1}(1) + p_{s+2}(1) + \ldots, +p_n(1) > 0,$$

где s число, участвующее в условии гиперболичности (3) (для краткости считаем, что $1 < s < n$. Все остальные числа J_m лежат строго внутри отрезка $[J_0,\ J_1]$).

Спектральную задачу (1), (2) назовем *регулярной*, если числа c_0 и c_1, отвечающие показателям J_0 и J_1 в представлении (4) отличны от нуля.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие гиперболичности и задача* (1), (2) *регулярна. Тогда ее собственные значения* $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *лежат в некоторой полосе, параллельной мнимой оси и асимптотически совпадают с нулями* $\{\lambda_k^0\}_{-\infty}^{\infty}$ *определителя* (4), *т.е.*

$$\lambda_k = \lambda_k^0(1 + o(1)) \quad \text{при } k \to \pm\infty.$$

При этом собственные и присоединенные функции задачи образуют полную систему с пространстве $L_2(\mathbb{C}^n; [0,1])$. *При дополнительном условии строгой гиперболичности) корневые функции образуют безусловный базис со скобками и в скобки заключаются только члены, которые отвечают сближающим собственным значениям. Число членов, подлежащих объединению в скобки, ограничено константой, зависящей от параметров невозмущенной задачи.*

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No 20-11-20261.

Список литературы

[1] *Савчук А.М., Шкаликов А.А.*, Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами–распределениями. Матем. сборник. 2020. Т. 211, № 11. С. 129–166.

[2] *Косарев А.П., Шкаликов А.А.*, Матем. заметки. 2021. Т. 110, № 6. С. 796–800.

МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия. Email: ashkaliko@yandex.ru

ОБ УСРЕДНЕННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

ШУМИЛОВА В.В.

Доклад посвящен выводу усредненной системы уравнений акустики для двухфазных слоистых сред. В качестве фаз рассматриваются изотропные твердые материалы: упругий материал или вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненная слоистой средой с εY-периодической структурой, где $Y = (0,1)^3$, а величина ε много меньше линейных размеров области Ω. Считаем, что ячейка периодичности εY содержит M слоев первого и $M+1$ слоев второго материала. Обозначим через Y_s часть куба Y, соответствующую s-й фазе ($s = 1, 2$). Отметим, что Y_1 есть объединение M слоев, а Y_2 — объединение $M + 1$ слоев.

Введем обозначения: $u^\varepsilon(x,t)$ — вектор перемещений, σ^ε и $e(u^\varepsilon)$ — тензоры напряжений и малых деформаций соответственно, $\Omega_{s\varepsilon}$ — занятая s-й фазой часть области Ω. Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров σ^ε и $e(u^\varepsilon)$, имеют вид

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = a^{(s)}_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon) + b^{(s)}_{ijkh} e_{kh}(\partial_t u^\varepsilon), \quad x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad s = 1, 2,$$

$$a^{(s)}_{ijkh} = \lambda_s \delta_{ij}\delta_{kh} + \mu_s(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}),$$

где λ_s и μ_s — параметры Ламе, а δ_{ij} — символ Кронекера. Если $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена упругим материалом, то $b^{(s)} = 0$; если же $\Omega_{s\varepsilon}$ заполнена вязкоупругим материалом Кельвина-Фойгта, то

$$b^{(s)}_{ijkh} = \zeta_s \delta_{ij}\delta_{kh} + \eta_s(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}),$$

где ζ_s и η_s — коэффициенты вязкости [1].

Начально-краевая задача, описывающая колебания среды в области Ω, имеет вид

$$\rho_s \frac{\partial^2 u^\varepsilon_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x,t) \ \text{ в } \ \Omega_{s\varepsilon} \times (0,T), \quad s = 1, 2,$$

$$[u^\varepsilon]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma^\varepsilon_{ij} n_j]|_{S_\varepsilon} = 0, \quad S_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon},$$

$$u^\varepsilon(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^\varepsilon(x,0) = \partial_t u^\varepsilon(x,0) = 0,$$

где ρ_s — плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$, n — единичный вектор нормали к поверхности S_ε, а $f(x,t)$ — вектор объемной силы.

Как известно, усредненная задача, описывающая предельное поведение исходной слоистой среды при $\varepsilon \to 0$, имеет вид [1]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x,t) \ \text{ в } \ \Omega \times (0,T),$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0,$$

где $\rho = \rho_1|Y_1| + \rho_2|Y_2|$,

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(u) + \beta_{ijkh} e_{kh}(\partial_t u) - g_{ijkh}(t) * e_{kh}(u). \tag{1}$$

Компоненты усредненных тензоров α, β, $g(t)$ явно выражаются через компоненты исходных тензоров $a^{(s)}$, $b^{(s)}$ и решения вспомогательных стационарных и эволюционных задач на ячейке Y. Решая эти задачи и затем вычисляя компоненты указанных тензоров, приходим к следующему ключевому результату.

Теорема 1. *Если Y_1 и Y_2 состоят из объединения плоских слоев, параллельных одной из координатных плоскостей, то компоненты тензоров α, β и $g(t)$ в (1) зависят от $|Y_1|$ и $|Y_2|$ и не зависят от числа слоев и расположения разделяющих их границ внутри Y.*

Отметим, что результат остается справедливым и в том случае, когда упругие или вязкоупругие слои исходной среды заменяются на слои вязкоупругого материала с долговременной памятью.

Список литературы

[1] *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 2. С. 282–290.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия.
Email: v.v.shumilova@mail.ru

Authors Index

Научное издание

**Международная конференция,
посвященная памяти
И. Г. Петровского**

**24 совместное заседание Московского математического
общества и Семинара имени И. Г. Петровского
Москва, 26 – 30 декабря 2021 г.**

Тезисы докладов

Компьютерная верстка и подготовка оригинал–макета: nginx/1.14.2, PHP
7.3.31-1 deb10u1, #1 SMP Debian 4.19.208-1 (2021-09-29) GNU/Linux.
Дизайн обложки: Плешанов Е.В.